几 何 变 换

第 一 册

U.M.亚格龙 著

尤承业 译 詹汉生 校

北 京 大 学 出 版 社

內 容 提 要

本书讨论的是平面上的一类基本的几何变换——保距变换。

本书通过对“什么是几何学？”这个问题的讨论，自然地引出保距变换的概念。然后给出了平移、旋转、反射和滑动反射等保距变换的定义和性质，复合和分解的规律，以及它们的相互关系。最后对保距变换作了分类。

书中配有许多相当困难但饶有兴味的习题，认真做这些题，有助于加深对正文的理解，并增添学习的兴趣。书后附有详细的题解。

本书可作为中学数学教师的参考资料，也可作为爱好数学的中学生、低年级大学生的课外读物。

U. M. Yaglom
GEOMETRIC TRANSFORMATIONS

几 何 变 换 （第一册）
U.M.亚格龙 著
尤承业 译　詹汉生 校
责任编辑　徐信之

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

787×1092毫米　32开本　4.5印张　100千字
1987年2月第一版　1987年7月第一次印刷
印数：00001—8800册
统一书号：13209·139　定价：0.95元

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学。入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大。一本好书循循善诱、引人入胜；相反，则望而生畏、令人却步。

由于种种原因，数学往往被罩上一层神秘的面纱。好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有哪些主要方面？近代数学研究什么问题？有哪些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套“新数学丛书”，向广大读者推荐。

和一般的通俗数学读物不同，“新数学丛书”的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题。这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理等方面的应用。内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想。

这套书还有一个特点：选写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深、热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩、深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌。

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径。

“新数学丛书”首创于一九六一年，已陆续出版近三十

册。有些书早已脱销。“新数学丛书”编委会，特别是Anneli Lax 教授得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书。在此，我们表示衷心的感谢。

江泽涵　张恭庆

一九八三年春 于 北京大学

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂。“新数学丛书”中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围，各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快，他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是“做数学”；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见。请函告 Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y. 10012.

编 辑 者

作 者 简 介

亚格龙(Яглом)1921年出生于苏联哈尔科夫市，1942 年毕业于斯维尔德洛夫大学，1945年获得副博士学位。他早年曾在莫斯科国立大学、奥彼克霍夫-基辅教育学院等校任教，1957年至1968年任莫斯科国立教育学院的几何学教授。1968年以后，他在莫斯科的一所工程技术夜大学任教。

他对苏联的数学教学具有相当大的影响。他还发表了许多科学论著，其中有不少被译成英文，如《Complex Numbers in Geometry》，《Couvex Figures》等等。

序　　言（摘译）

这部书分为两册[1]，是专为初等几何写的。长期以来，尤其是在十九世纪，初等几何的领域里积累了极其丰富的资料。许多关于圆、三角形和多边形的美妙而意想不到的定理被证明了；在初等几何的内部，还形成了一些完整的分支，如“三角形的几何”，“四面体的几何”等等。这些分支都有各自的广泛题材，各自的习题和解题的方法。

然而，本书的目的并不是向读者介绍初等几何中那些他们所不熟悉的定理。我们认为，上面谈到的初等几何的那些发展，并不说明需要有专著来阐述它们。这是因为超出高中课程范围的大部分定理只不过是一些“古董”，它们既没有什么实用价值，又脱离了数学发展的主流。但是，在初等几何中，除去一些具体的定理之外，还包含了两个重要的有普遍意义的思想，它们构成了几何学的一切进一步发展的基础，其重要性远远超出了几何学的界限。其中之一是演绎法和几何学的公理基础；另一个是几何变换和几何学的群论基础。这些思想都是内容丰富和卓有成效的。例如，两者的直接发展都导致了非欧几何的产生。本书的任务是阐明这两种思想之一——几何学的群论基础。

……

我们还要就本书的特点说几句话。本书面向十分广泛的读者。在这种情况下，难免要为照顾一部分读者而不能顾及另一部分读者的兴趣。作者牺牲了基础较好的读者的某些兴趣，力求使本书简单明了，通俗易懂，而不去过分追求严密

[1] 中译本分成四册。——中译者

性和逻辑上的精确性。例如，我们不一般地对几何变换这个概念下定义，因为尽管定义的术语在直观上是清楚的，但它总是使一些缺乏经验的读者感到困难。由于同样的原因，我们不得不避开有向角的概念，并且把有向线段的概念推迟到第二章引进，尽管这样做使得正文和习题解答中的某些论证严格地说是不完整的。……但是我们认为，基础好的读者自己能够去完善这些论证；而对于基础不那么好的读者，严格性上的欠缺不会对他们有什么妨碍。……

在术语的选用上也有同样的考虑。作者根据自己当学生的经验确信，如果在一本书中出现大量生疏的术语，会大大增加它的难度，因此在术语的使用上尽量做得最为经济。在某些情况下，不得不放弃一些方便的术语，这样也就可能忽视了基础较好的读者的某些兴趣。……

习题为读者提供了自己对正文内容掌握如何的一个检验机会。不必按顺序解所有的习题，但是我们主张读者在每一组习题中至少选做一个(做几个更好)。本书的结构使得照这样办法做的读者将不会丢失任何基本的内容。在解完(或试图去解)一个习题时，读者应当研究书后的解答。

习题一般不一定与正文衔接，但解答都是用本书的基本内容和初等几何中的变换。特别要注意的是解题方法而不是结论。个别的习题可能出现在几个不同的地方，因为将同一个问题的几种不同的解法加以比较，常常是有益的。

有许多作图题。在解这些习题时，我们并不去追求“最简单”(在某种意义下)的作图法。作者的看法是，对这些习题主要的兴趣是在逻辑上，而实际上怎样完成作图并不很重要。

……

亚格龙

目　　录

前　言

什么是几何学？

基谢廖夫在他的高级中学几何课本的开头，给出了点、线、面、体的定义，并规定几何图形是“以常规的方式处在空间中的点、线、面、体的集合”，紧跟着就给几何学下了定义：“几何学是研究几何图形的性质的学科。”这可能使人产生一个印象：作为前言标题的这个问题似乎早已在高级中学几何课本中回答了，用不着我们再来做文章。

然而，这种简单化的印象是错误的。虽然不能说基谢廖夫的定义不对，但它是不完善的。“性质”这个词的含义很广泛，几何学当然不能研究图形的所有性质。例如，一个三角形是画在白纸上的，还是画在黑板上的，这在几何学中是不重要的；三角形的颜色并不是几何学的研究对象。当然我们可以这样解释：按照上面的定义，几何学所研究的是几何图形的性质，而颜色是用来画三角形的纸的性质，不是图形本身的性质。但是，这种解释仍然不会使人满意。究竟图形的哪些性质是几何学中所研究的？人们总是希望能依据一个“数学式”的定义来判别，而这里还缺少这样的定义。例如，当你试图去解释下面的现象时，就会感到这种不足。在几何学中，我们只研究画在黑板上的三角形的一个顶点到某些直线（例如这个三角形的这个顶点的对边）的距离，而不研究它到另一些直线（例如黑板的边框线）的距离。如果要用上面的定义来解释这现象，简直是不可能做到的。

但是在这里我们要说明，不能因为上述定义的不完善而

去责怪学校用的几何课本，在学习几何的最初阶段，基谢廖夫的定义也许是所能给出的唯一的定义。要明白这一点，只需看看下面的事实，几何学的历史开始于4000多年以前，但几何学的第一个科学的定义（本书的主要目的之一就是描述这个定义）却是在大约80年前(1872年)由德国数学家克莱因(F.Klein)给出的。非欧几何学的创建推动了这个定义的产生。在罗巴切夫斯基(Лобачевский)创建非欧几何学时，数学家们并没有明确认识到有必要对几何学的研究对象下一个确切的定义。只是在非欧几何创建之后，人们才明白，"几何图形"的直观概念不再能作为几何学科中的丰富多采的结构的基础了。直观概念是不能容纳多种"几何学"的。

现在我们回到原题来澄清几何学所研究的几何图形的性质。我们已看到，几何学所研究的并不是几何图形的所有性质，而只是其中的一部分。在对这部分属于几何学所研究的性质作出精确描述之前，我们只能笼统地说：几何学研究的是图形的"几何性质"。而这个说法并不能使基谢廖夫的定义得到完善，只是把问题变成了"什么是几何性质？"。对这个新问题又只能回答"几何性质是几何学中所研究的那些性质"。这样，我们就兜了一个圈子：几何学规定为研究图形的几何性质的学科，而几何性质又规定为几何学中所研究的性质。要冲破这个圈子，我们必须不用"几何学"这个词来规定"几何性质"。

为了研究什么是图形的"几何性质"这个问题，我们先看一个大家熟悉的命题：给定两边 a,b 和夹角 C 作三角形，则只有一个解[图1(a)]①。可是， 如果从另一角度去考虑，

① 与此不同，给定两边 a,b 和一个对角 A 作三角形，则可能有两个解[图(b)]。

这个结论似乎是不对的：实际上不止一个三角形具有给定边a,b和夹角C，而是有无穷多个(图2)；因此上述问题不止一个解，而是有无穷多个解。那么结论说只有一个解又是什么意思呢？

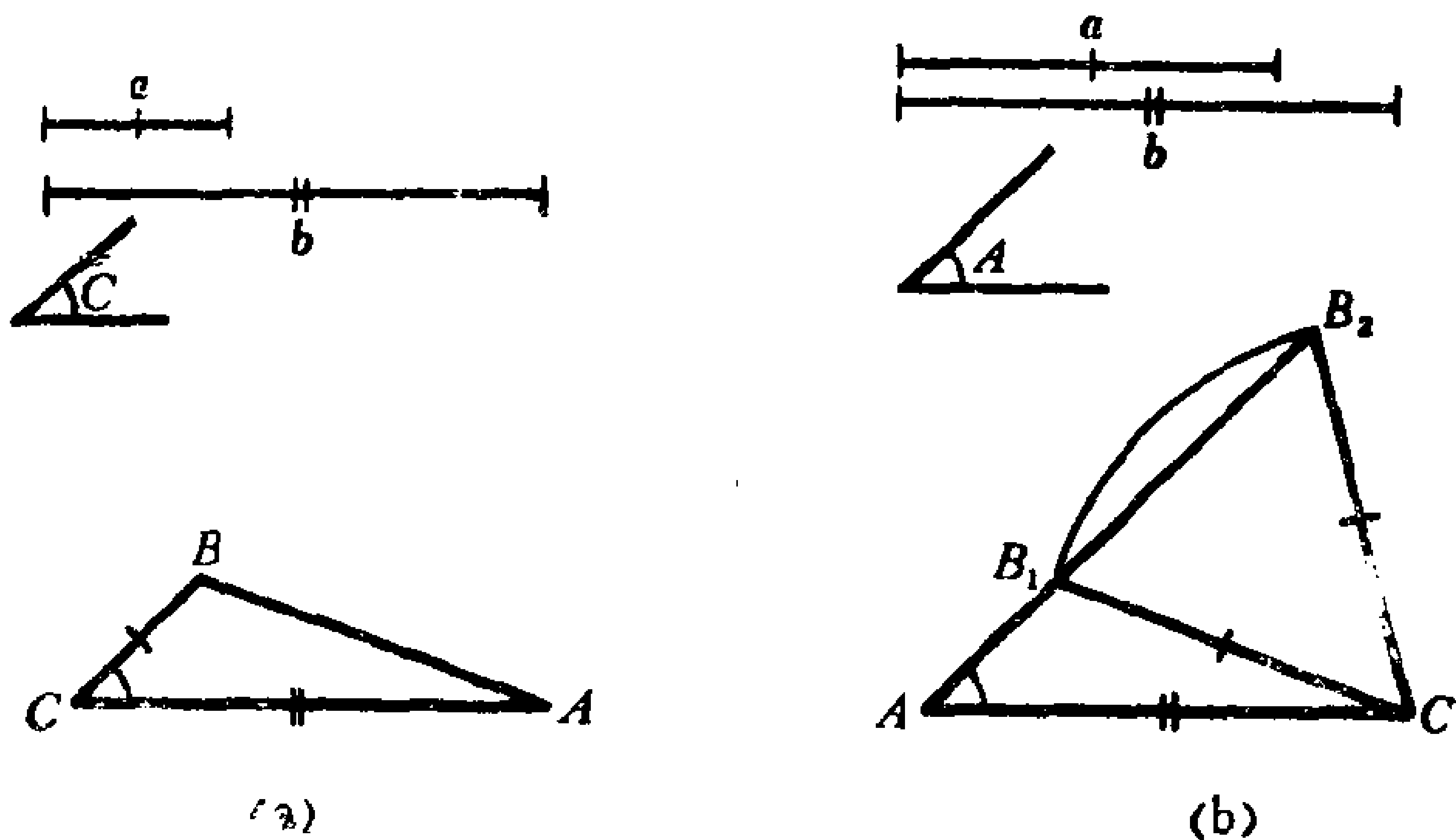


图 1

“由两边a,b和夹角C只能作一个三角形”这个结论显然是意味着所有具有给定边a,b和夹角C的三角形互相全

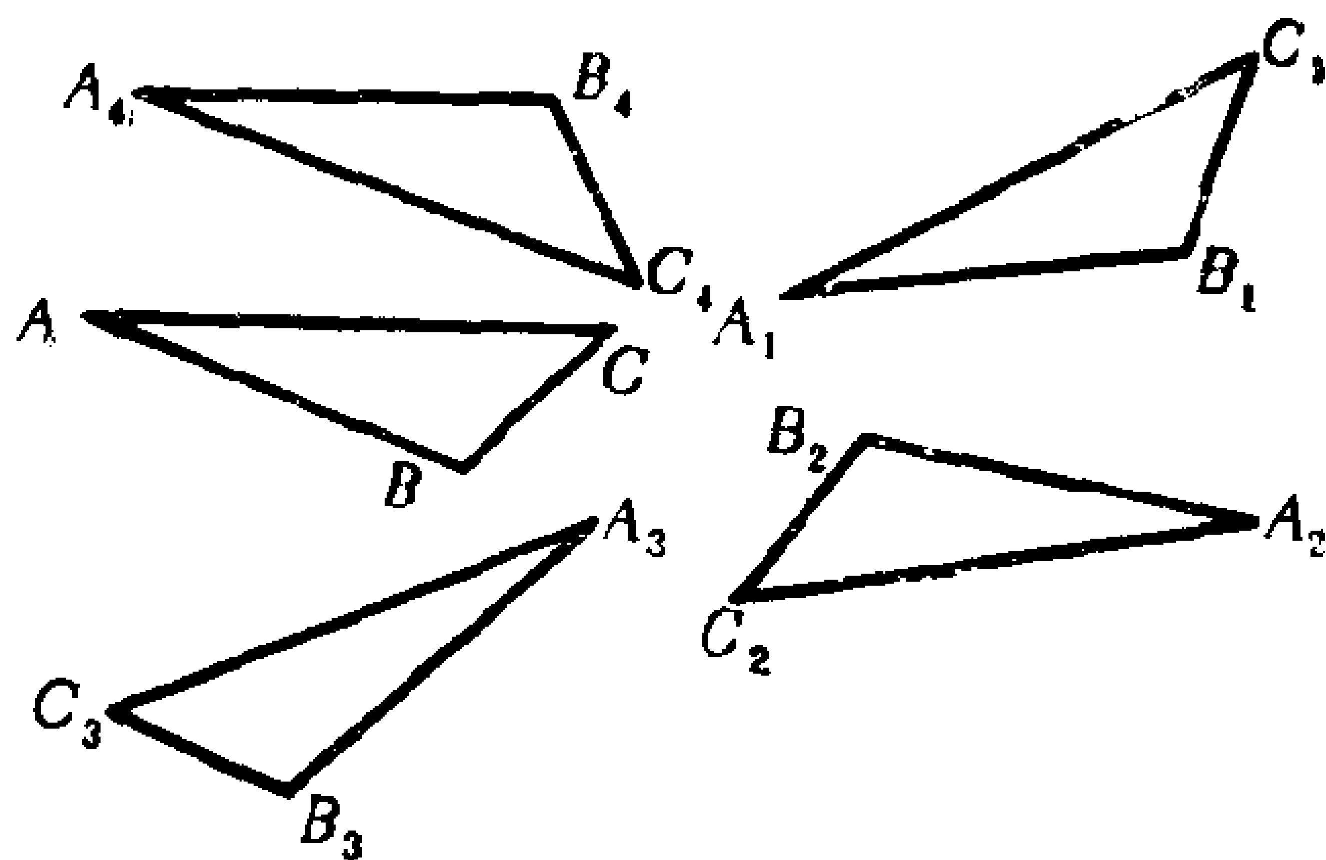


图 2

等。因此，更确切的说法是：给定两边和夹角可以作无穷多个三角形，但它们都互相全等。而在几何学中说只有一个

三角形具有给定的两边 a, b 和夹角 C 时，对那些只在位置上不相同的三角形是不加以区别的。既然几何学是研究图形的"几何性质"的学科，那么很清楚，只有几何性质完全相同的图形才能彼此不加区别。因此，全等的图形就有完全相同的几何性质；相反地，不全等的图形一定具有不同的几何性质，否则它们就不能区别了。

这样，我们就得到了图形的几何性质的定义：**图形的几何性质是全等的图形所共有的那些性质**。现在，我们可以明确回答前面提到的问题：为什么几何学中不研究三角形的一个顶点到黑板边框线的距离？这是因为这个距离不是几何性质，对于全等的图形来说，它不是不变的。而另一方面，三角形的高是几何性质，因为全等三角形的对应高是相等的。

至此，我们离几何学的定义已经很近了。我们知道几何学研究的是图形的"几何性质"，也就是全等图形所共有的性质。剩下只用回答"什么是全等图形？"这个问题了。

最后的这个问题也许会使有些读者失望，它可能造成这样的印象：到此为止我们什么也没有得到，只是单单把一个问题变成另一个同样困难的问题。然而事实并不是这样，什么情况下两个图形全等的问题是不难回答的，基谢廖夫的几何课本已给出了一个完全令人满意的回答。按照基谢廖夫的说法，"如果两个图形中的一个经过在空间中的移动，可以和另一个在各个部分上都重合，就称它们是全等的"。换句话说，全等的图形就是能经过运动而做到彼此完全重合的那些图形。因此，图形的几何性质——全等图形所共有的性质——就是图形在移动中不变的那些性质。

现在，我们终于得到了几何学的下述定义：**几何学是研究几何图形在运动中不变的那些性质的学科**。我们就在这个

定义上停步了，尽管这个定义还有进一步发展的余地，但我们将在以后来讨论它。

爱追根究底的读者也许对这个定义仍不满意，要求我们解释运动的意义。可以这样回答：运动① 是平面(或空间)的一个几何变换，它把每一点A变到另一点A'，并且使得任何两点A和B之间的距离等于它们所变到的点A'和B'之间的距离②．运动的这个定义是相当抽象的。既然我们已认识到保距变换在几何学中起了如此重要的根本性作用，就愿意直观地认识它，并仔细地研究它的所有性质。这种研究就是本书第一册的重要内容，在这一册的末尾，列出了平面上所有可能的保距变换，这可以作为平面上保距变换的一个新的，而且更简单的定义。(参看第二章第二节末尾。)

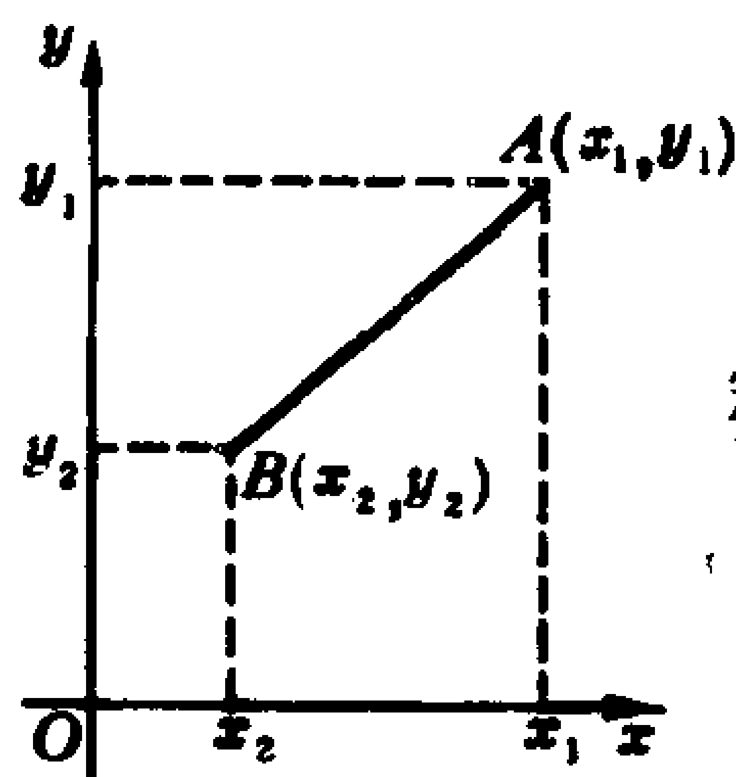


图 3

我们还要指出，研究保距变换不仅是为了用来明确几何学这个概念，它还有重要的实用意义。保距变换在解决许多几何题，特别是作图题时，有许多应用；这可以用它在几何学中的根

---

① 或称保距变换，或称刚体运动。下面将常用保距变换这个词。——英译者

② 平面上两点A和B之间的距离等于

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

这里x_1,y_1和x_2,y_2分别是A和B在某个直角坐标系中的坐标(图3)．(坐标系的选择是无关紧要的。)于是距离概念归结为一个简单的代数式，不必作任何解释了。

类似地，空间中两点A和B的距离等于

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

这里x_1,y_1,z_1和x_2,y_2,z_2是A和B在空间中的直角坐标。

本性作用来解释。同时，从保距变换的研究中还能得到可用来解许多几何题的某些一般方法。有时，我们能应用它们把一组习题化成同一个习题；而若由别的途径去解这些习题，则要用各不相同的方法。例如，我们考虑三个大家熟悉的作图题：

(a) 在平面上作一个三角形，使得在它的三条边上分别向外作的三个等边三角形的新顶点恰为预先给定的三点。

(b) 在平面上作一个三角形，使得在它的三条边上分别向外作的三个正方形的中心恰为预先给定的三点。

(c) 给定七边形各边的中点，求作此七边形。

这三个习题用中学课本中的通常的方法也能解，但这时看起来它们似乎是互不相关的(而且都是相当复杂的习题)。

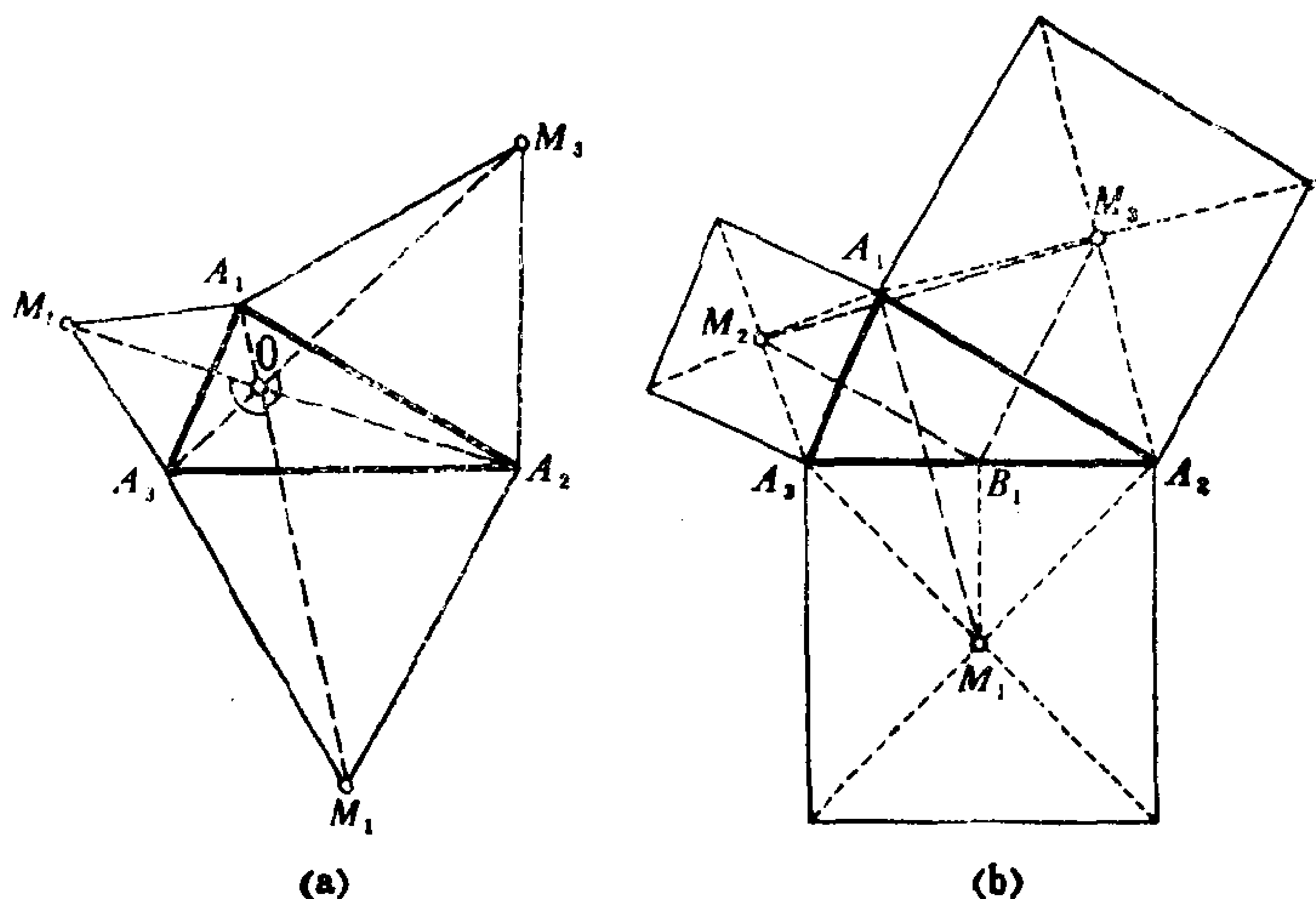


图 4

第一题可以这样解：先证明图 4(a)中三条直线 A_1M_1，A_2M_2 和 A_3M_3 交于一点 O，并且互相夹相等的角(就是说

$\angle M_1OM_2=\angle M_1OM_3=\angle M_2OM_3=120°$。于是我们可以由$M_1,M_2$和$M_3$找到$O$点了)。然后再证明

$$OA_1+OA_2=OM_3,\quad OA_2+OA_3=OM_1,\quad OA_3+OA_1=OM_2.$$

(从而就有$OA_1=(OM_2+OM_3-OM_1)/2$等三个等式. 这样就能找到点A_1,A_2,A_3了。)

解第二题时只要先证明[图4(b)]

$$M_2B_1\perp M_3B_1 \quad 和 \quad M_2B_1=M_3B_1,$$

这里B_1是三角形$A_1A_2A_3$中A_2A_3边的中点；或者证明(这是第二种解法！)

$$A_1M_1=M_2M_3 \quad 和 \quad A_1M_1\perp M_2M_3.$$

解第三题可以利用下面的事实：七边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$的对角线A_1A_5的中点M'_5与点M_5,M_6,M_7恰是一个平行四边形的四个顶点[图4(c)]，因此M'_5可以作出。于是，作七边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$的问题就转化成作五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$的类似问题了。这个新问题又可用同样方法继续化简。

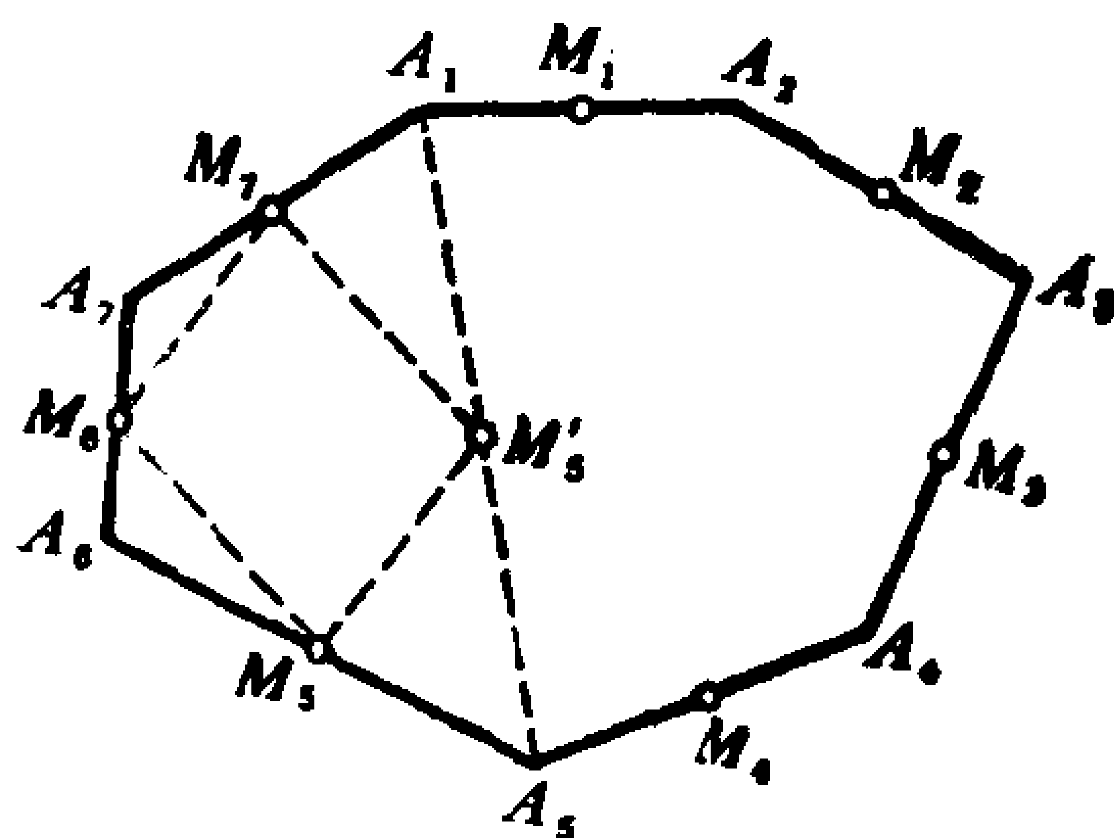


图 4(c)

以上这几个解法技巧性都是相当高的，都要作一些辅助线，(事先我们怎么知道要作哪些辅助线呢？)并且都是要动动脑筋的。但是，保距变换的研究使我们能提出并解答一个更一般的作图题(参见21题)：

求作一个n边形，使得分别以它的各边为底边、给定角$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为顶角的(并在n边形外的)n个等腰三角形的顶点

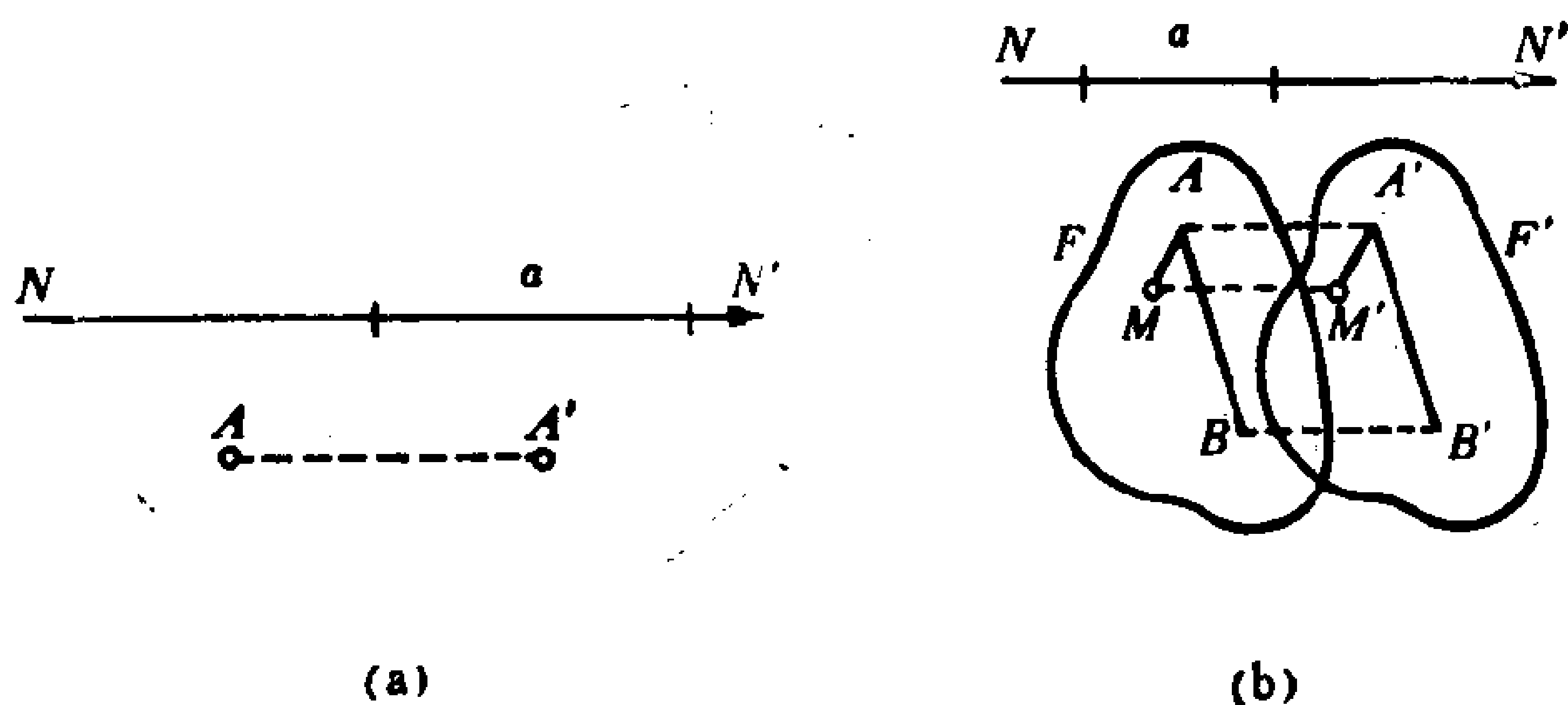
恰是给定的n个点；（当$n=3$，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=60^\circ$时，就是题(a)；当$n=3$，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=90^\circ$时，就是题(b)；当$n=7$，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_7=180^\circ$时，得到题(c)。）

这个一般的作图题能用关于保距变换的某些定理很简单地解决，并且不须画任何图。在第一、二两章中，读者还能找到一大批能借助于保距变换来解的几何题。

第一章 位　移

1. 平　移

在平面上选定一个方向 NN'（可用一条带箭头的直线表示），并取定一条长度为 a 的线段。设 A 是平面上任意一点，取点 A'，使得线段 AA' 具有 NN' 的方向，并且长度为 a[图5(a)]。这时，我们就说 A' 是 A 点经过在 NN' 方向上的、距离为 a 的平移而变得的点；或者说 A 点被这个平移变到 A' 点。设 F 是一个几何图形。在这个平移下，所有由 F 上的点所变得的点的集合构成一个新图形 F'，称 F' 是 F 经过这个平移而变得的图形[图5(b)]。有时我们也说 F' 是图形 F "整个地"沿着 NN' 方向移动距离 a 所得到的图形。这里"整个地"的意思是指图形 F 的所有点都按同一个方向移动同一距离；也就是说，所有连接图形 F 和 F' 上对应点的直线段互相平行，方向相同并且长度相等。如果图形 F' 是由 F 经过一个 NN' 方向上的平移得到的，那么图形 F 也可



(a)　　　　(b)

图 5

以由 F' 经过一个相反方向(即 $N'N$ 方向)上的平移而得到。因此，我们就可以说两个图形相差一个平移。

平移把一条直线 l 变成一条与它平行的直线 l'[图6(a)]，并把一个圆 S 变成一个与它相等的圆 S'[图 6(b)]。

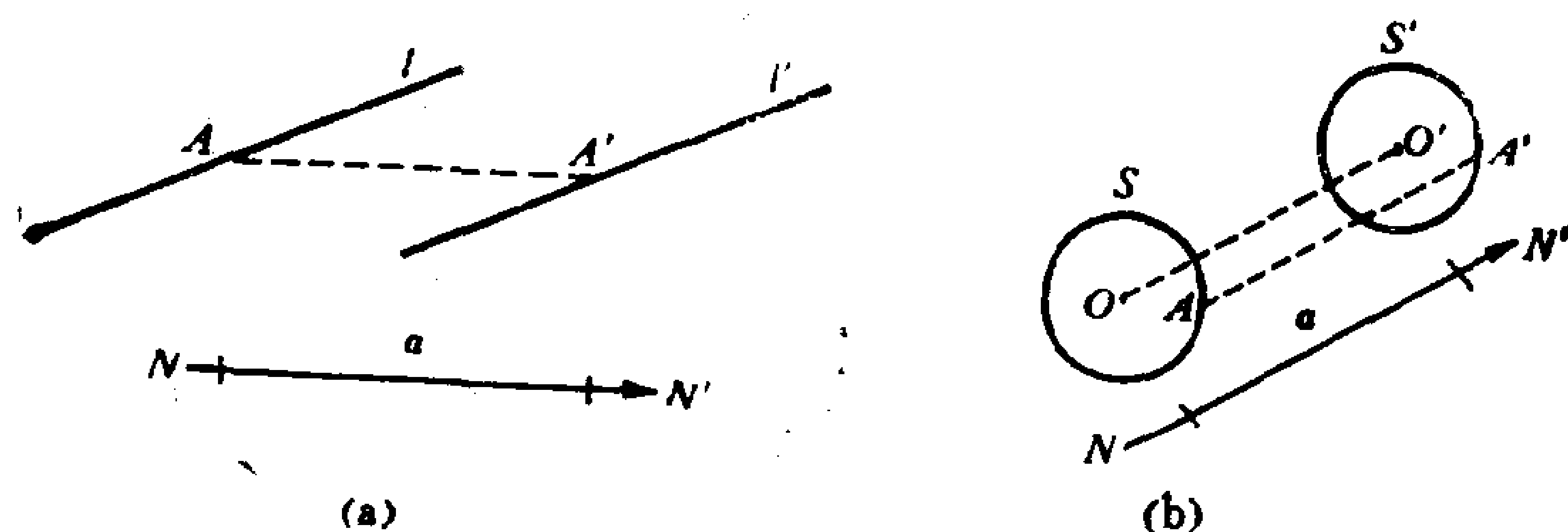


图 6

1. 给定两个圆 S_1 和 S_2，一直线 l。试作一条平行于 l 的直线，使它与 S_1 和 S_2 的两个交点之间的距离等于给定值 a。

2. (a) A 和 B 两城市被一条河隔开。现要在河上架设一桥 MN。试问桥架在何处才能使 A 到 B 的路径 $AMNB$ 最短[图 7 (a)]？(假定河的两岸是两条平行直线，桥要与河垂直。)

(b) 设在上题中隔开 A 和 B 的是几条河，每条河上各架一桥，应该在哪儿架才能使 A 到 B 的路径最短[图 7 (b)]？

3. (a) 给定两条直线 l_1 和 l_2。试求到 l_1 和 l_2 的距离之和为给定值 a 的点M的轨迹。

(b) 给定两条直线 l_1 和 l_2。试求到 l_1 和 l_2 的距离之差为给定值 a 的点M的轨迹。

4. 设D, E, F分别是三角形 ABC 的三边 AB, BC, CA

的中点；又设 O_1,O_2,O_3 分别是三角形 ADF,BDE,CEF 的三个外心(外接圆的圆心)，Q_1,Q_2,Q_3 分别是这三个三角形的内心(内切圆的圆心)。试证三角形 $O_1O_2O_3$ 和 $Q_1Q_2Q_3$ 全等。

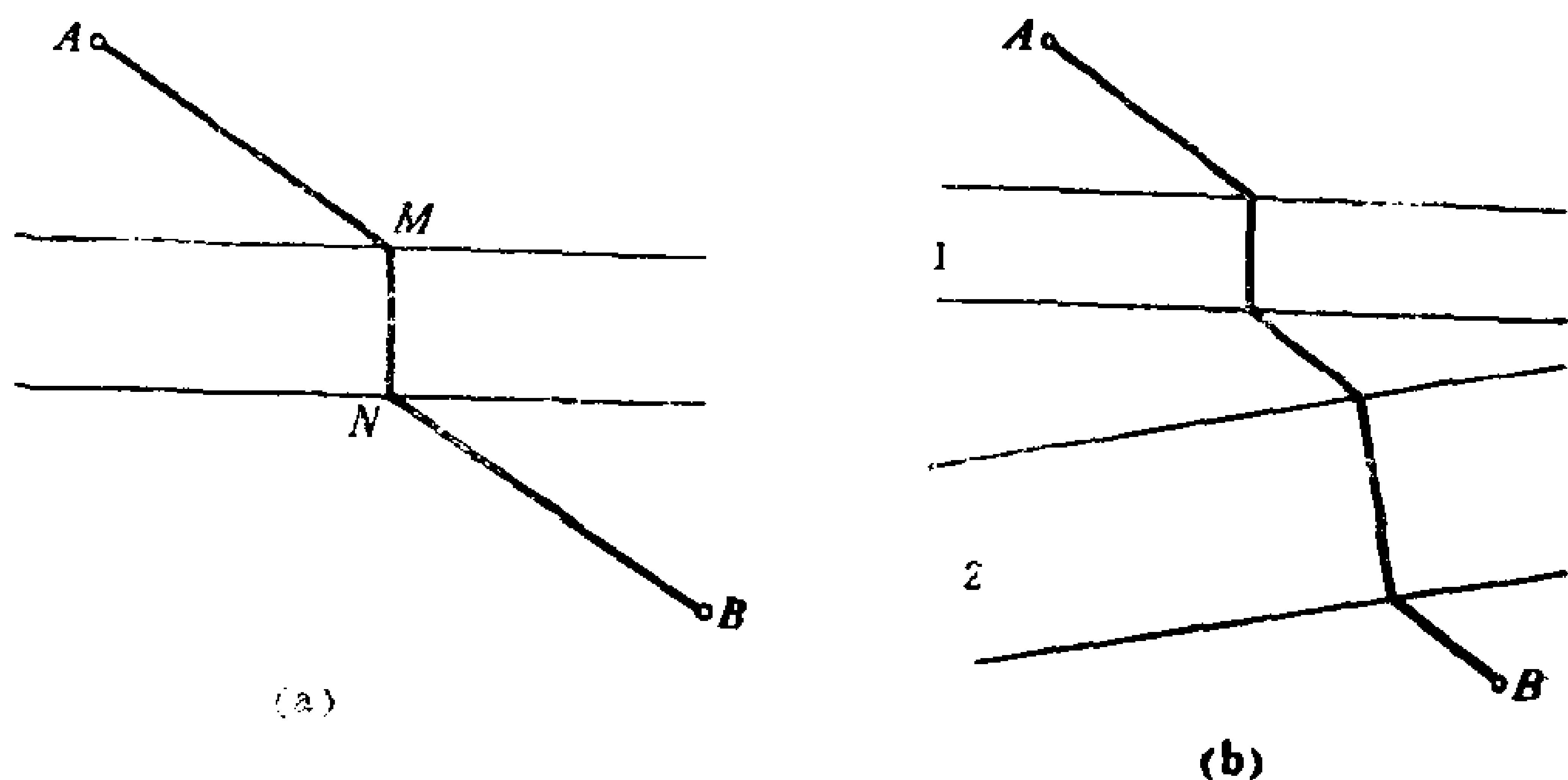


图 7

5． 试证：如果四边形 $ABCD$ 的一双对边的中点连线 MN(M和N分别是 AD 和 BC 的中点)的长度等于 AB,CD 长度之和的一半，则这个四边形是梯形。

6． 在圆上给定两条弦 AB 和 CD。试在圆周上找一点X，使得弦 AX 和 BX 在 CD 上截下的线段 EF 的长度等于给定值 a (图 8)。

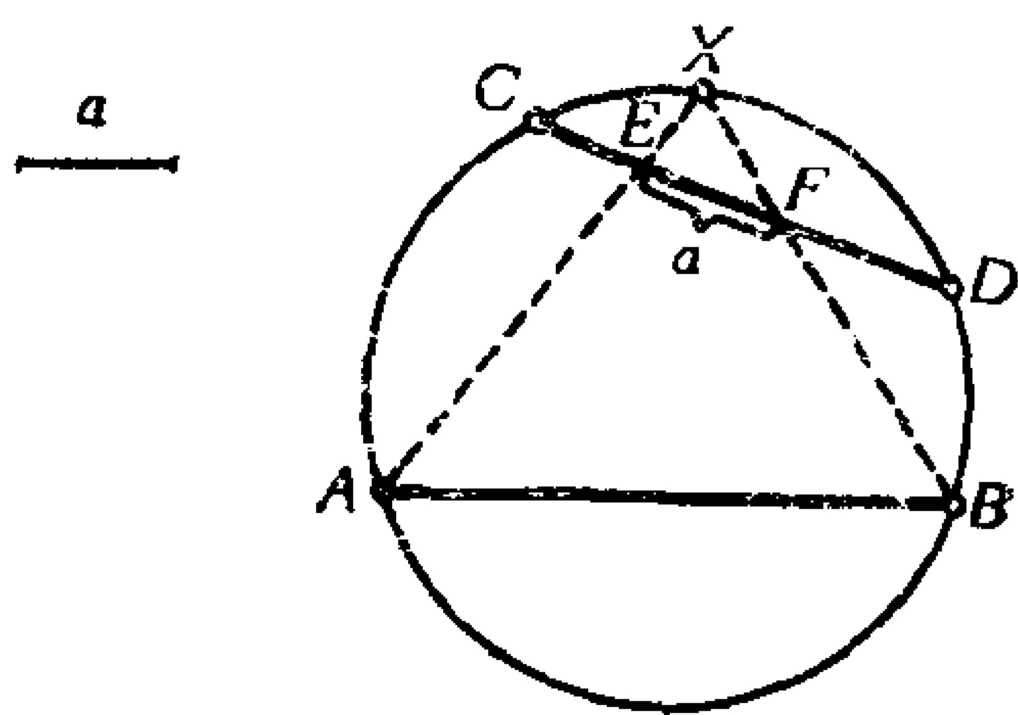


图 8

7． (a) 给定两个相交的圆 S_1 和 S_2，设 A 是它们的一个交点。试过 A 作一直线 l，使它和 S_1,S_2 的另两个交点 M_1,M_2 之间的距离为给定值 a。

(b) 试作一三角形，使它和一个已知三角形全等，并且

三条边分别经过三个给定点。

此题还将在第二册第二章的第一节中出现[见49题(a)]。

8. 给定两个圆 S_1 和S_2，一直线 l_1 以及一点 A。试作直线 l：

(a) 平行于 l_1，并使 S_1 和 S_2 在 l 上截得的两弦等长。

(b) 平行于 l_1，并使 S_1 和 S_2 在 l 上截得的两弦长度之和(或差)等于定值 a。

(c) 经过 A 点，并使 S_1 和 S_2 在 l 上截得的两弦等长。

平移是平面变换(把平面上每一点变到另一点)的一个例子①。在平移下，沒有一点留在原处不动(即沒有点变到自己)。换句话说，**平移沒有不动点**。

但是，在一个平移下，有不改变位置的直线：所有平行于平移方向的直线都变到自己(这种直线沿自身滑动)，因此这些直线(也只有这些直线)是这个平移的**不变直线**。

现在我们讨论平移的另外一些性质。设两个图形 F 和 F' 相差一个平移；又设 A 和 B 是 F 的任意两点，A' 和B' 是它们在图形 F' 上的对应点[见图5(b)]。因为 $AA' \parallel BB'$，并且 $AA' = BB'$②，所以四边形 $AA'B'B$ 是平行四边形，从而 $AB \parallel A'B'$ 且 $AB = A'B'$。于是，如果图形 F 和 F' 相差一个平移，则这两个图形上的对应线段相等，平行并且方向相同。

下面，我们来证明这个结论的反面：如果从图形 F 上的点到另一个图形 F' 上的点有一个对应关系，使得联结 F 上任

① 按照前言中的定义，平移还是保距变换(运动)，因为我们马上就要证明，它把每个线段 AB 变成等长的线段 $A'B'$。

② 这里 $AA' = BB'$ 的意义是线段 AA' 和 BB' 的长度相等。在本书中，从一点 P 到另一点 Q 的距离仍将简单地记作 PQ。——英译者

意两点的线段与联结 F' 上对应两点的线段相等，平行并且方向相同，则 F 与 F' 相差一个平移。在图形 F 和 F' 上取定一对对应点 M 和 M'。设 A 和 A' 是任意的另一对对应点[见图5(b)]。我们有 $MA \parallel M'A'$ 和 $MA = M'A'$；由此推出四边形 $MM'A'A$ 是平行四边形，因此 $AA' \parallel MM'$ 和 $AA' = MM'$。这就是说，A' 点是 A 点经过一个在 MM' 方向上的距离为 MM' 的平移而得到的。由 A 和 A' 的任意性，可知图形 F' 是图形 F 经过以 MM' 为方向，距离为 MM' 的平移而得到的。

现在我们考察接连进行两个平移的结果。假设第一个平移把 F 变到 F_1，第二个平移又把 F_1 变到 F'（图 9）。如果第一个平移把图形 F 上的线段 AB 变到 F_1 上的线段 A_1B_1，则 $A_1B_1 \parallel AB$，$A_1B_1 = AB$，并且 A_1B_1 和 AB 有相同的方向。类似地，如果第二个平移把 A_1B_1 变成 F' 上的线段 $A'B'$，就有 $A'B' \parallel A_1B_1$，$A'B' = A_1B_1$，并且 $A'B'$ 和 A_1B_1

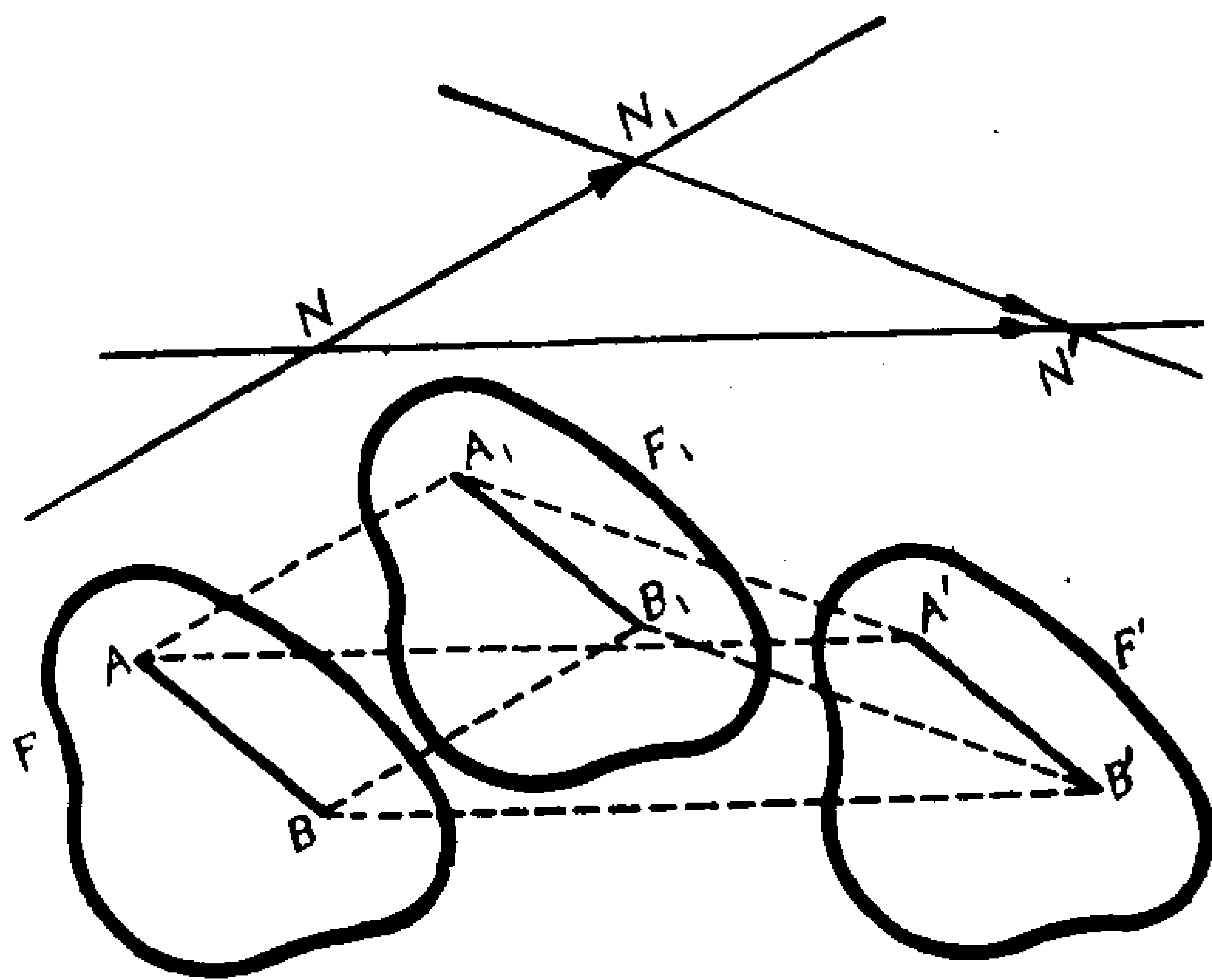


图 9

方向相同。于是，F 和 F' 的对应线段 AB 和 $A'B'$ 就相等，平行并且方向相同。根据上面所证的结果，存在一个平移将 F 变成 F'。这就说明，连续进行两个平移可用另一个平移来代替。

上述结论也可换另一个说法。在力学中，可用一个位移等价地代替几个位移的叠加，通常把这称为“位移的加法”。同样，我们也可引进“变换的加法”。平面上两个变换之和，就是作了第一个变换之后再作第二个变换所得到的变换①。于是，上面的结论可重述如下：两个平移之和也是一个平移②。还要注意，如果 NN_1 是表示第一个平移（它把 F 变到 F_1）的距离与方向的线段，N_1N' 是表示第二个平移（它把 F_1 变到 F'）的距离与方向的线段，那么线段 NN' 就表示把 F 变到 F' 的平移的距离与方向。

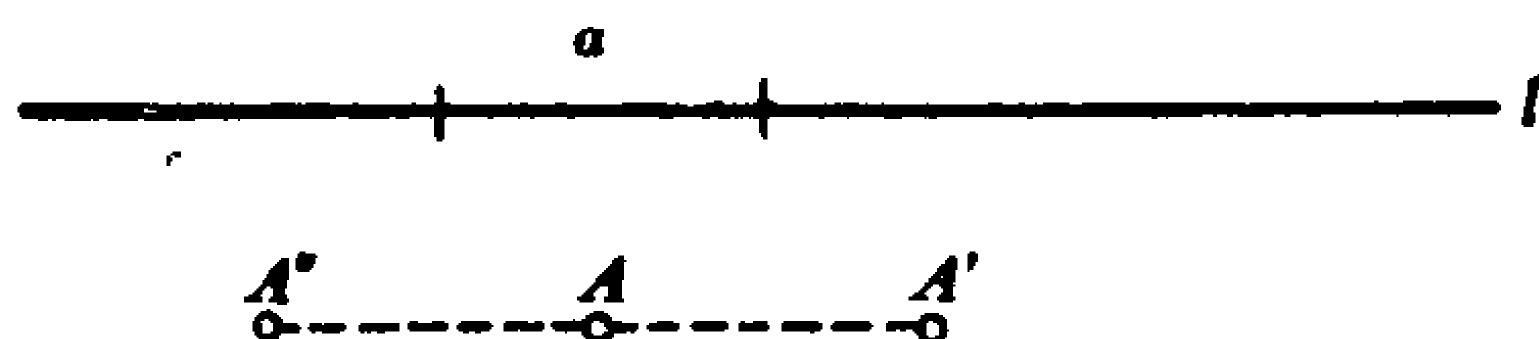


图 10

人们常说一个平移在一条已知直线 l 上移了给定的距离 a。然而，这种说法是不明确的，因为对于给定点 A，条件组

$$1.\ AA' \parallel l; \qquad 2.\ AA' = a$$

决定两个点 A' 和 A''（图10），而不是一个点。下面我们来改进这个说法，使之明确。选定直线 l 的一个方向作为正

① 数学文献中常把这个概念称为“变换的乘积”。

② 这个命题还有一个阐述形式：若两个图形 F 和 F' 都可由第三个图形 F_1 经平移而得到，则它们也互相可用平移来变得。

向(可用箭头来表示)，数量 a 可取正负值，由平移的方向与 l 的正向是否一致来决定。这样，图10中的 A' 点和 A'' 点分别对应着不同的(仅在正负符号上不同)平移距离。这样，就自然产生了直线上的有向线段的概念；这线段是可正可负的。

平移也可只用一个平面上的有向线段 NN' 来表示，这个有向线段既表示了平移的方向，又表示了它的大小(图11)。于是，就引出了平面上的有向直线段(向量)的概念，这个概念也产生于力学和物理学中。平移的加法导出了通常向量加法的定义(图 9)。

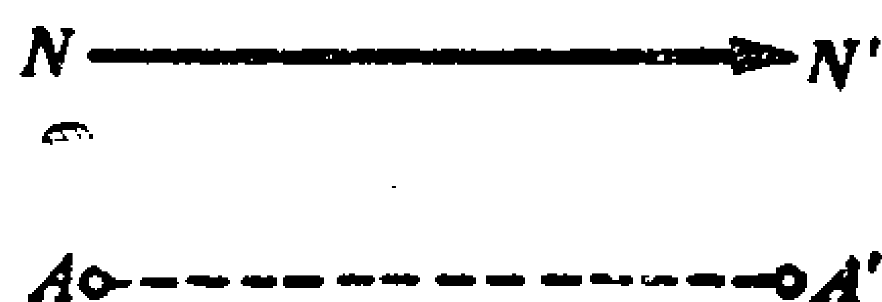


图 11

2. 中心对称和旋转

在平面上取定一点 O (称为对称中心)，我们来描述关于 O 点的中心对称。如果线段 AA' 的中点就是 O，那么就说 A 点经过关于 O 点的中心对称变为 A' 点[图12(a)]。显然，当 A 经过关于 O 点的中心对称变为 A' 时，A' 经过关于 O 点的中心对称就变为 A。因此，我们可以说两个点关于一给

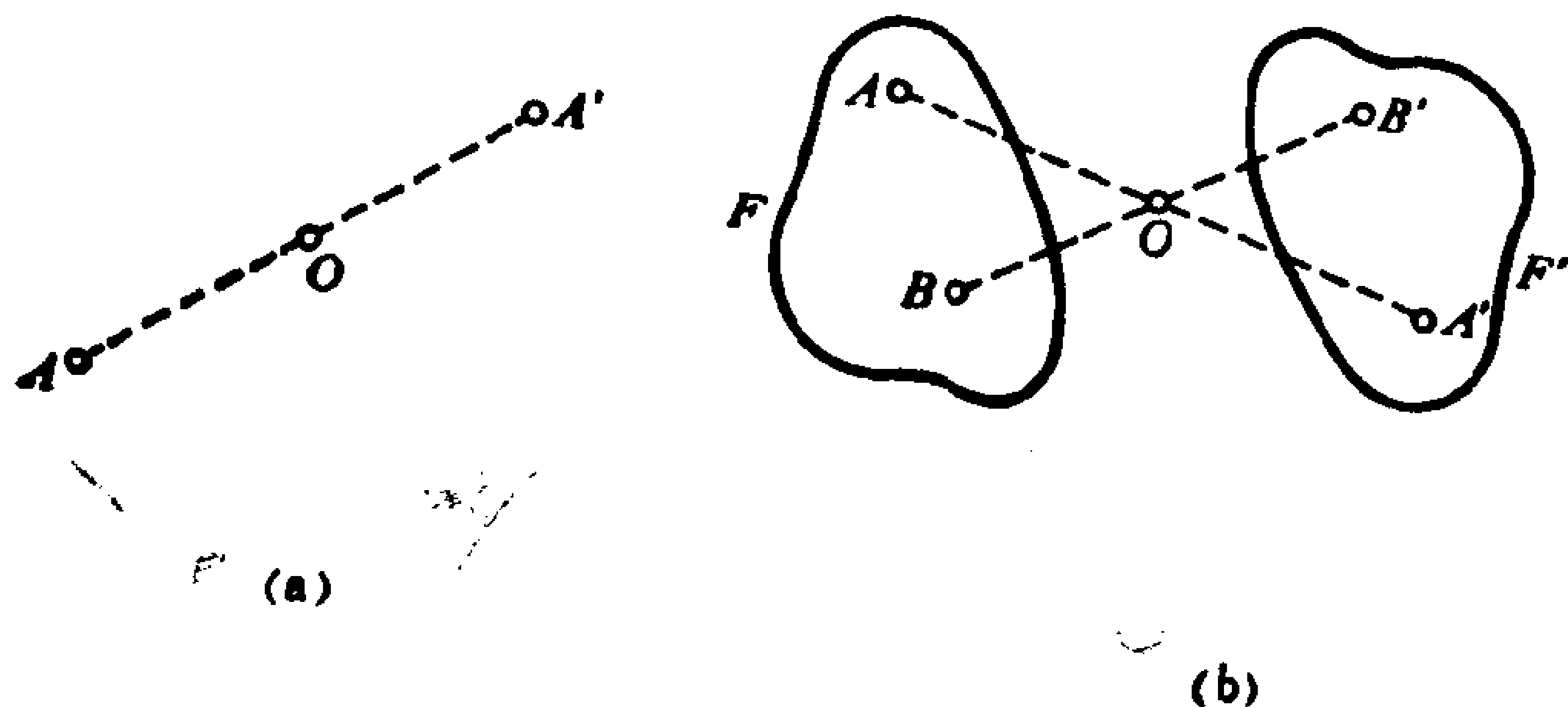


图 12

定点中心对称。当 A' 是 A 点经过关于 O 点的中心对称所变得的点时，我们也常说 A' 是 A 在 O 点上作反射的象，或者说 A' 关于 O 点对称于 A。

给定图形 F。F 上的所有点关于 O 点的对称点的集合构成一个新图形 F'，称 F' 是图形 F 经过关于 O 点的中心对称而变得的图形[图12(b)]；在这同时，F 也是 F' 经过关于 O 点的中心对称所变得的。中心对称把直线变成与它平行的直线

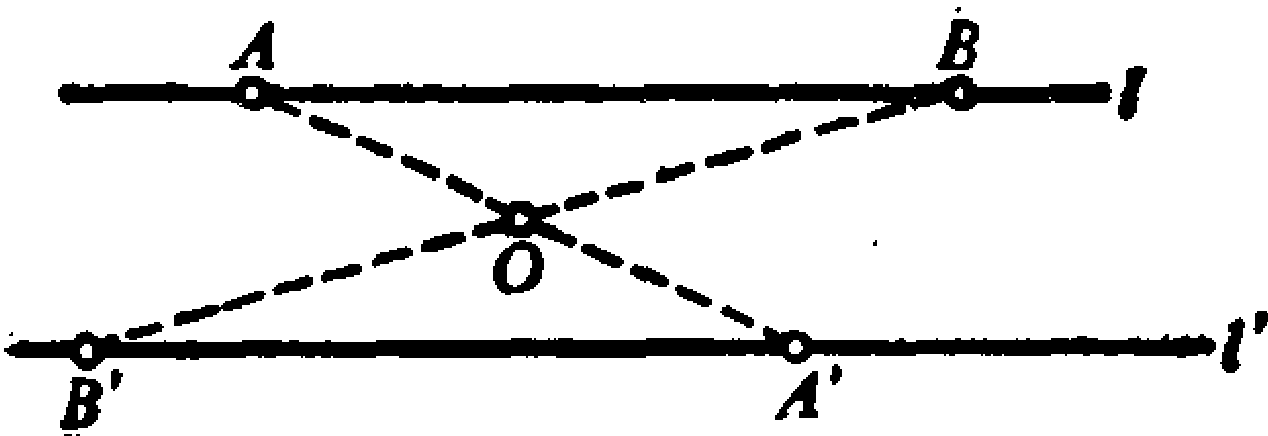


图 13(a)

[图13(a)]，把圆变成与它全等的圆[图13(b)]。(例如我们证明一个半径为 r 的圆经过一个中心对称变成一个全等圆。注意图13(b)中三角形 AOM 和 $A'OM'$ 是全等的，因而到 M 点的距离为 r 的 A 点的轨迹被变成到 M' 的距离为 r 的 A' 点的轨迹。)

9. 给定圆 S，直线 l 和点 A。试过 A 作一直线，使得

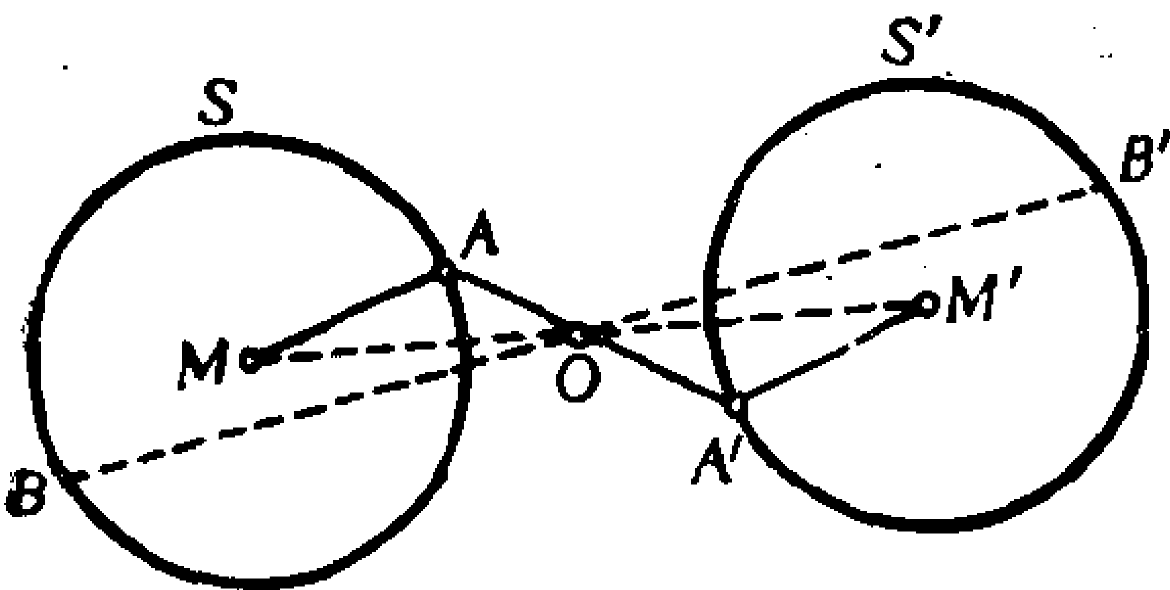


图 13(b)

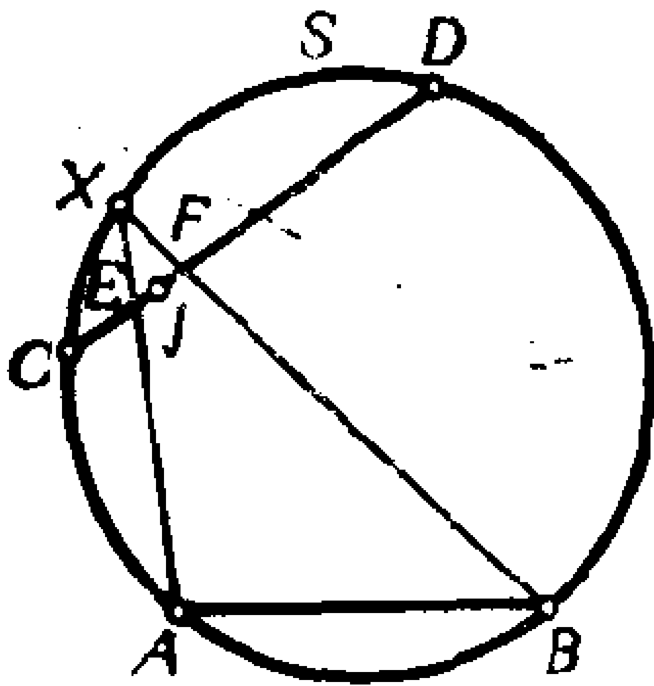


图 14

它与 l 和 S 的交点① 所夹线段的中点就是 A。

10. 过两圆 S_1 和 S_2 的交点 A 作直线 l，使得

(a) 圆 S_1 和 S_2 在 l 上截得等长的弦。

(b) 圆 S_1 和 S_2 在 l 上截得弦的差恰为给定值 a。

10题(b)显然是 7 题(a)的推广。

11. 设在圆 S 上给定两弦 AB 和 CD，并在 CD 上取定一点 J。试在圆周上找一点 X，使得弦 AX 和 BX 在 CD 上截得线段 EF 的中点为 J（图14）。

12. 两条平行直线所夹的带子显然有无穷多个对称中心（图15）。一个图形能有多于一个，但又是有限个对称中心吗？（例如能有两个对称中心吗？）

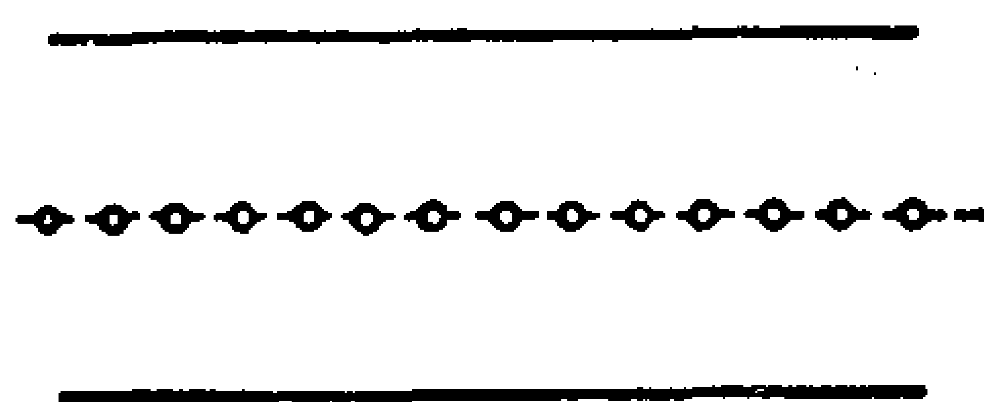


图 15

设图形 F 和 F' 关于O点中心对称。如果 AB 和 $A'B'$ 是 F 和 F' 上的一对对应线段(图 16)，则四边形 $ABA'B'$ 是平行四边形（因

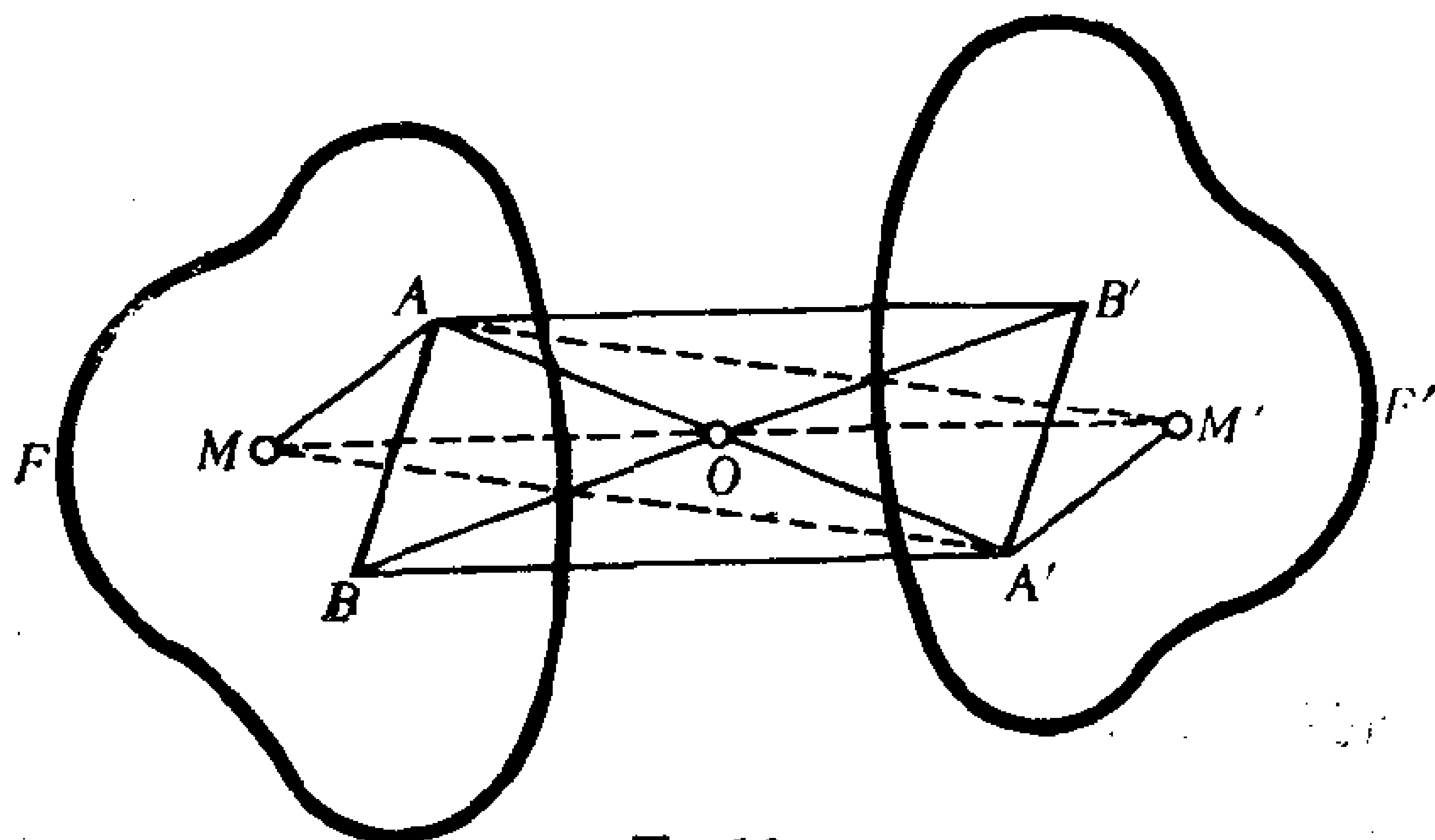


图 16

① 这里指直线与 S 的两个交点中的任何一个。

它的两条对角线被交点O平分)。于是就有下面结论：关于一点中心对称的两个图形上的对应线段等长，平行并且方向相反。下面，我们证明这个结论的反面：如果从图形F的点到F'的点有一个对应关系，使得F和F'上的任意一对对应线段(端点分别对应)相等，平行并且方向相反，则F和F'关于某一点中心对称。事实上，只要在F和F'上选定一对对应点M和M'，并记线段MM'的中点为O。设A和A'是F和F'上的任意另一对对应点(见图16)。由条件，有$AM \parallel M'A'$和$AM=M'A'$；从而四边形$AMA'M'$是平行四边形，其对角线AA'的中点与对角线MM'的中点O重合，即A'是由A经过关于O点的中心对称变得的。由A，A'的任意性，就知道F'是图形F经过关于O点的中心对称所变得的图形。

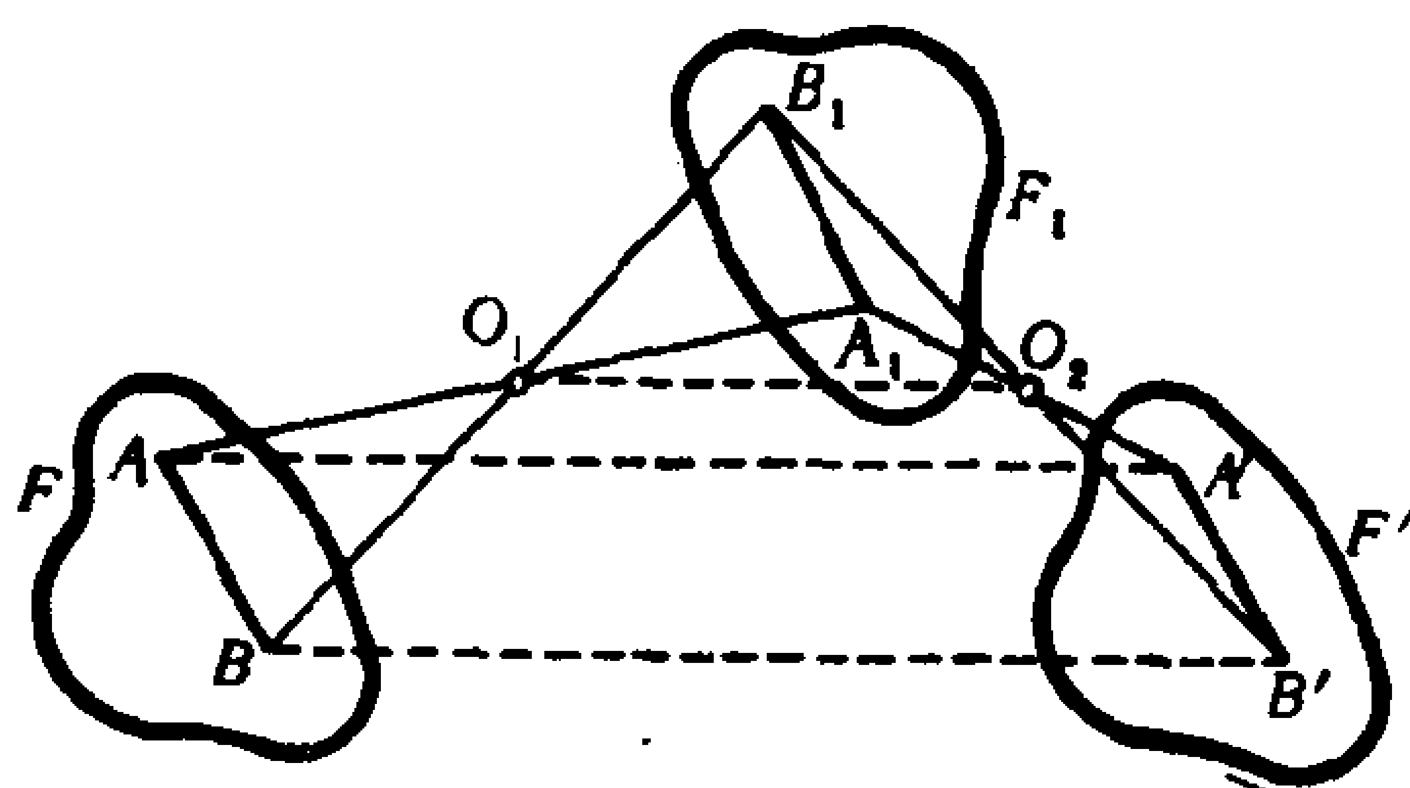


图 17

现在考虑三个图形F，F_1和F'，其中F_1是F经过关于O_1点的中心对称变得的，F'是F_1经过关于O_2点的中心对称变得的(图17)。设A_1B_1是F_1上一条任意线段，AB和$A'B'$分别是A_1B_1在F和F'上的对应线段。则A_1B_1与AB等长，平行且方向相反；A_1B_1与$A'B'$也等长，平行且方向相反；于是线段AB与$A'B'$等长，平行且方向相同。这样，

图形 F 和 F' 上的对应线段等长，平行且方向相同，因而 F' 可由 F 经过一个平移而变得。我们就得到：两个中心对称之和是一个平移(对照14页的结果)。这个结论也可从图17直接看出。因为 O_1O_2 是三角形 AA_1A' 的两边 AA_1 和 A_1A' 的中点连线，所以 $AA' \parallel O_1O_2$，且 $AA' = 2O_1O_2$；这就是说，F' 上的每一点 A' 都是由它在 F 上的对应点 A 经过在 O_1O_2 方向上的、距离为线段 O_1O_2 两倍的平移而得到的。

用完全相同的方法可以证明，一个平移与一个关于 O 点的中心对称之和(图18)，或一个关于 O 点的中心对称与一个平移之和，是关于某个新点 O_1 的中心对称。

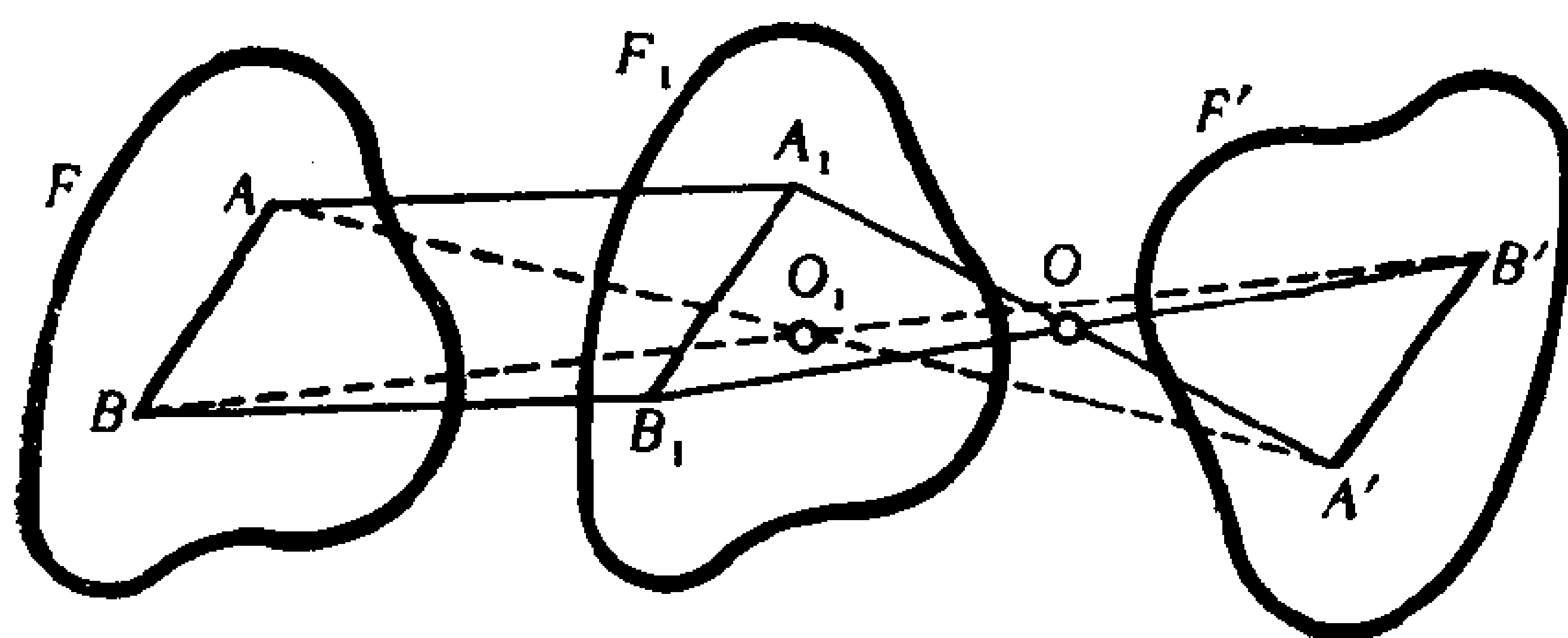


图 18

我们再进一步作一些重要分析。连续作关于 O_1 点和 O_2 点的两次中心对称(在图19中：$A \to A_1 \to A'$)，相当于作一

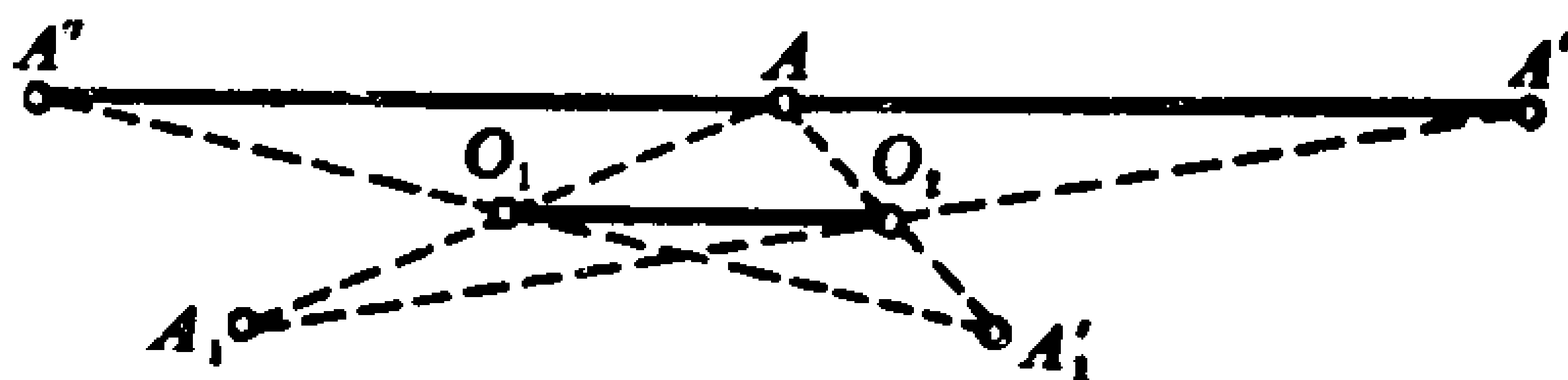


图 19

个 O_1 到 O_2 方向的平移，平移距离为 $2O_1O_2$；而同样这两个

中心对称，按相反的次序进行(在图19中：$A \to A_1' \to A''$)，则相当于在 O_2 到 O_1 方向上的一个平移，距离也是 $2O_1O_2$。由此可见，两个中心对称之和对于它们进行的次序有着实质性的依赖关系。这种现象是变换的加法的特征，一般说来两个变换之和是依赖于它们的次序的。

在谈到中心对称的加法时，我们总是把它看作整个平面的变换，它把平面的每一点 A 变到一个新点 A'①。不难看出，一个中心对称只有一个不动点，它就是对称中心 O，而不变直线就是通过 O 点的那些直线。

13．(a) 给定平面上偶数个点 $O_1, O_2, \cdots, O_n$；又设 AB 是平面上任一线段．记 A_1B_1 是 AB 经过关于 O_1 点的中心对称所变得的，A_2B_2 是 A_1B_1 经过关于 O_2 点的中心对称所变得的，A_3B_3 是 A_2B_2 经过关于 O_3 点的中心对称所变得的，…，最后 A_nB_n 是 $A_{n-1}B_{n-1}$ 经过关于 O_n 的中心对称所变得的(见图20(a)，那里 $n=4$)。试证 $AA_n = BB_n$。

如果 n 是奇数，本题结论还成立吗？

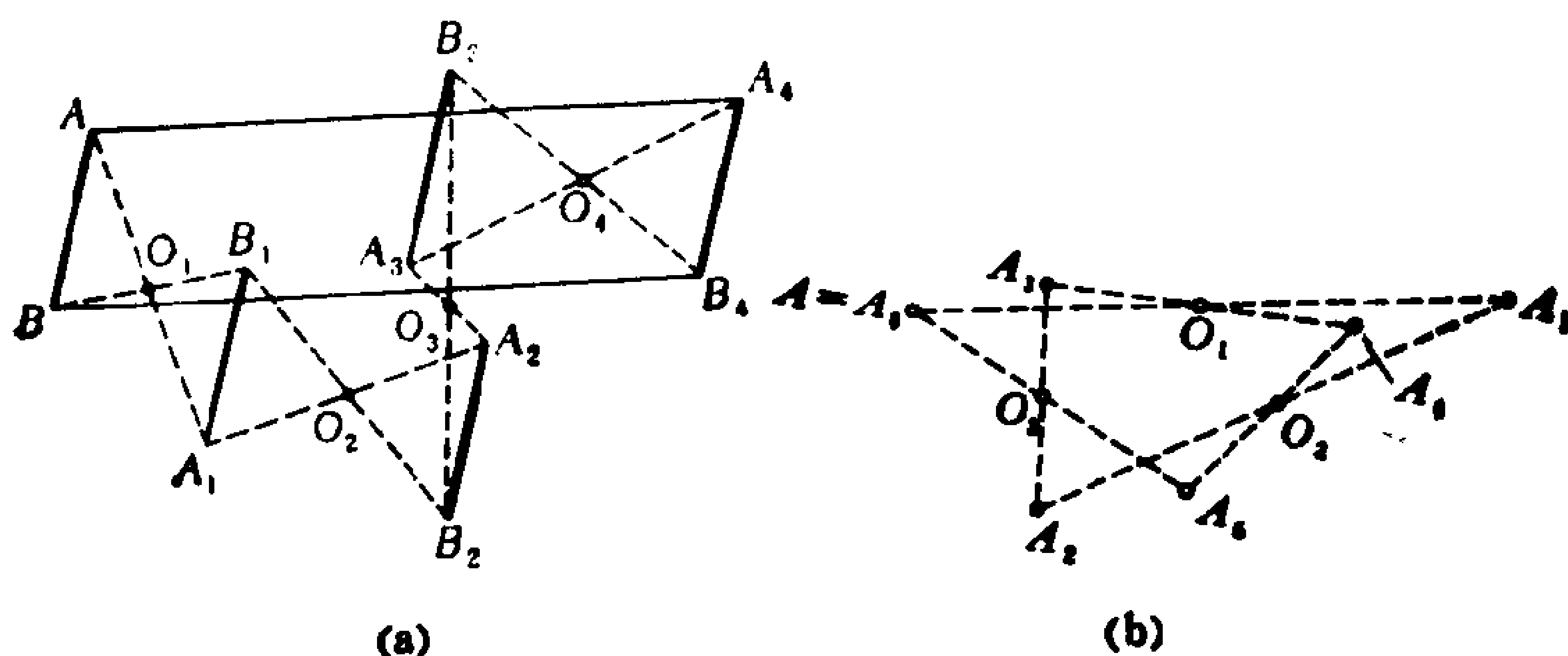


图 20

① 见12页的脚注①。

(b) 给定平面上奇数个点 $O_1, O_2, \cdots, O_n$(见图20(b)，那里$n=3$)。任取一点A，将A相继作关于$O_1, O_2, \cdots, O_n$点的中心对称，然后再将所得点相继作关于$O_1, O_2, \cdots, O_n$的中心对称。试证明经过这$2n$次中心对称最后所得点A_{2n}与A重合。

如果n是偶数，本题结论还成立吗?

14. (a) 设O_1, O_2, O_3, O_4是平面上任意取定的四点;任给第五点A。将A相继作关于O_1, O_2, O_3, O_4的中心对称;然后仍从A出发，相继作关于这四点的中心对称，但次序改成O_3, O_4, O_1, O_2。试说明在这两种情况下，A点最后所变得的是同一点A_4(图21)。

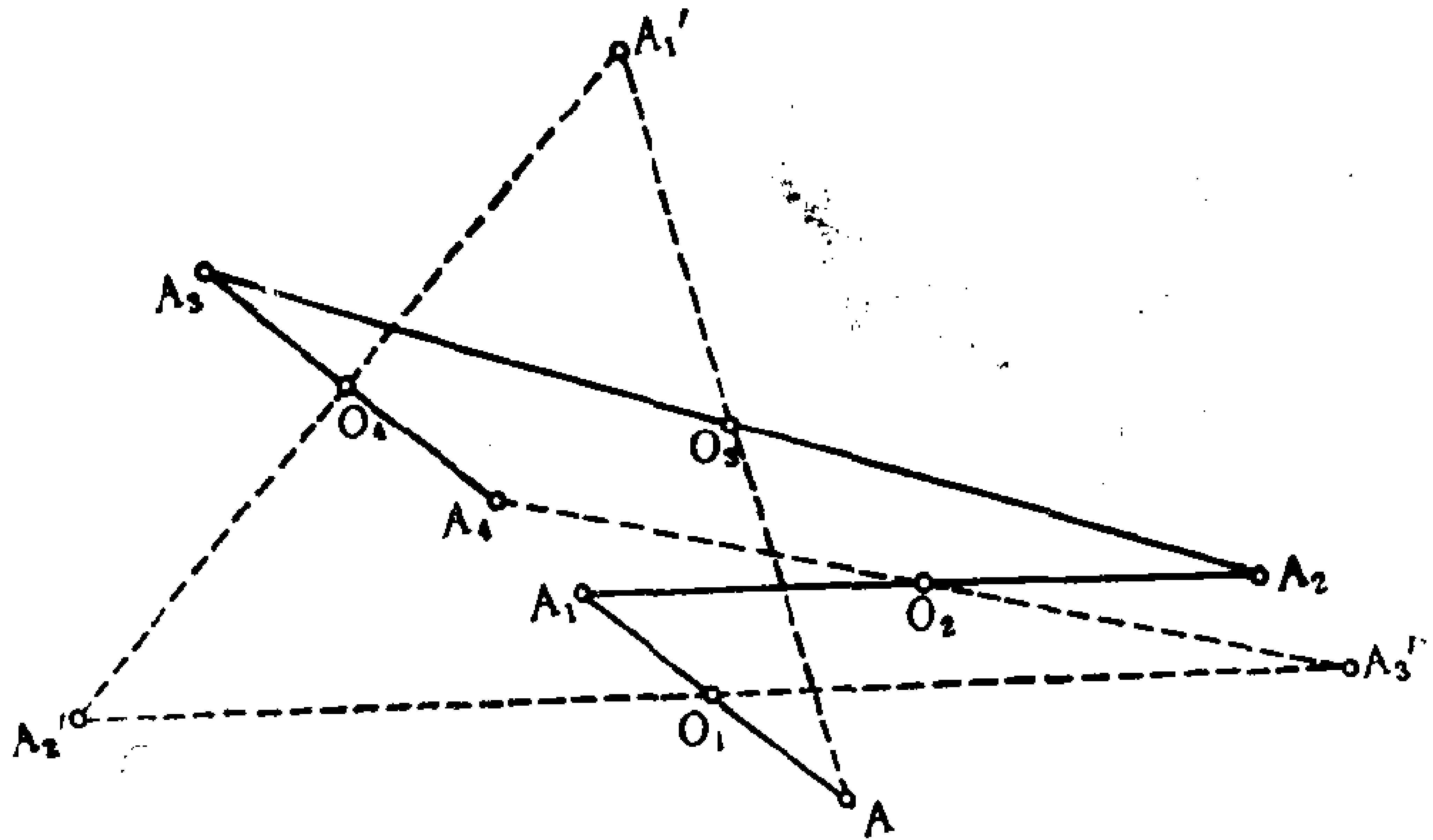


图 21

(b) 设O_1, O_2, O_3, O_4, O_5是平面上任意五个点。将任意一点A相继作关于O_1, O_2, O_3, O_4, O_5的中心对称;然后再将A相继作关于这五点的中心对称，但次序改成O_5, O_4, O_3, O_2, O_1。试说明在这两种情况下，A点最后变得的是同一

点A_0。

(c) 在平面上给定n个点$O_1,O_2,\cdots,O_n$。将任意一点相继作关于$O_1,O_2,\cdots,O_n$的中心对称；再将原来点相继作关于$O_n,O_{n-1},\cdots,O_1$的中心对称。试问当n是什么数时，两种做法最后得到的点位置相同？

15. 设n是一个奇数(例如$n=9$)，给定平面上n个点。试作一个n边形，使得它各边的中点就是这n个点。

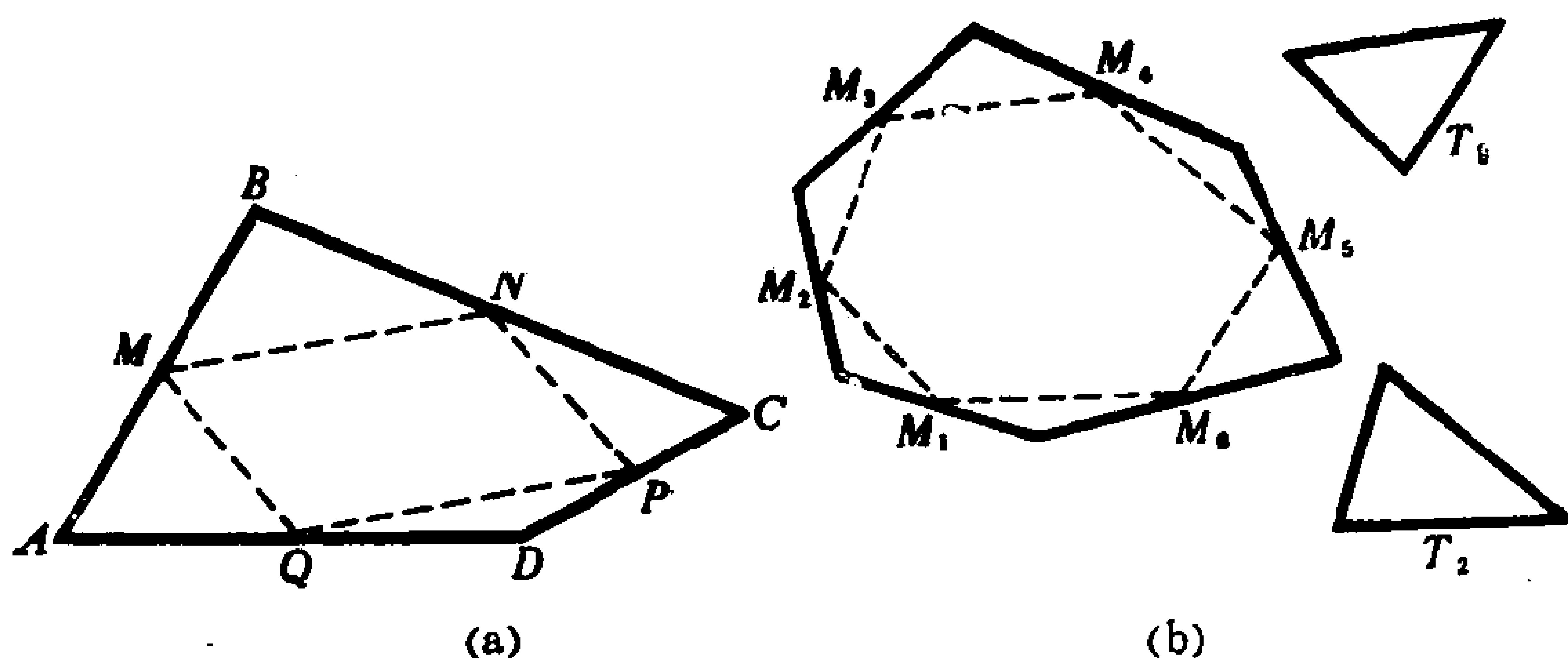
考虑n为偶数的情形。

21题(31页)是15题的推广，它也就是第二册第一章第二节的37题。

16. (a) 试证：任意一个四边形各边中点构成一个平行四边形[图22(a)]。

(b) 设M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6是一个六边形各边的诸中点。试证：存在三角形T_1和T_2，T_1的各边分别平行且等于M_1M_2,M_3M_4,M_5M_6，T_2的各边分别平行且等于M_2M_3，M_4M_5，M_6M_1[图22(b)]。

在平面上选定一点O，给定一个角α并约定一个旋转方



(a) (b)

图 22

向(通常我们取反时针方向)。设A是平面上任意一点，令A'是满足条件$OA=OA'$和$\angle AOA'=\alpha$(因而当OA按规定方向旋转α角时便与OA'重合)的点，我们就说A'是A点经过中心为O，转角为α的旋转而变得的点，或者说A点被这个旋转变到A'点[图23(a)]。一个图形F的所有点经过

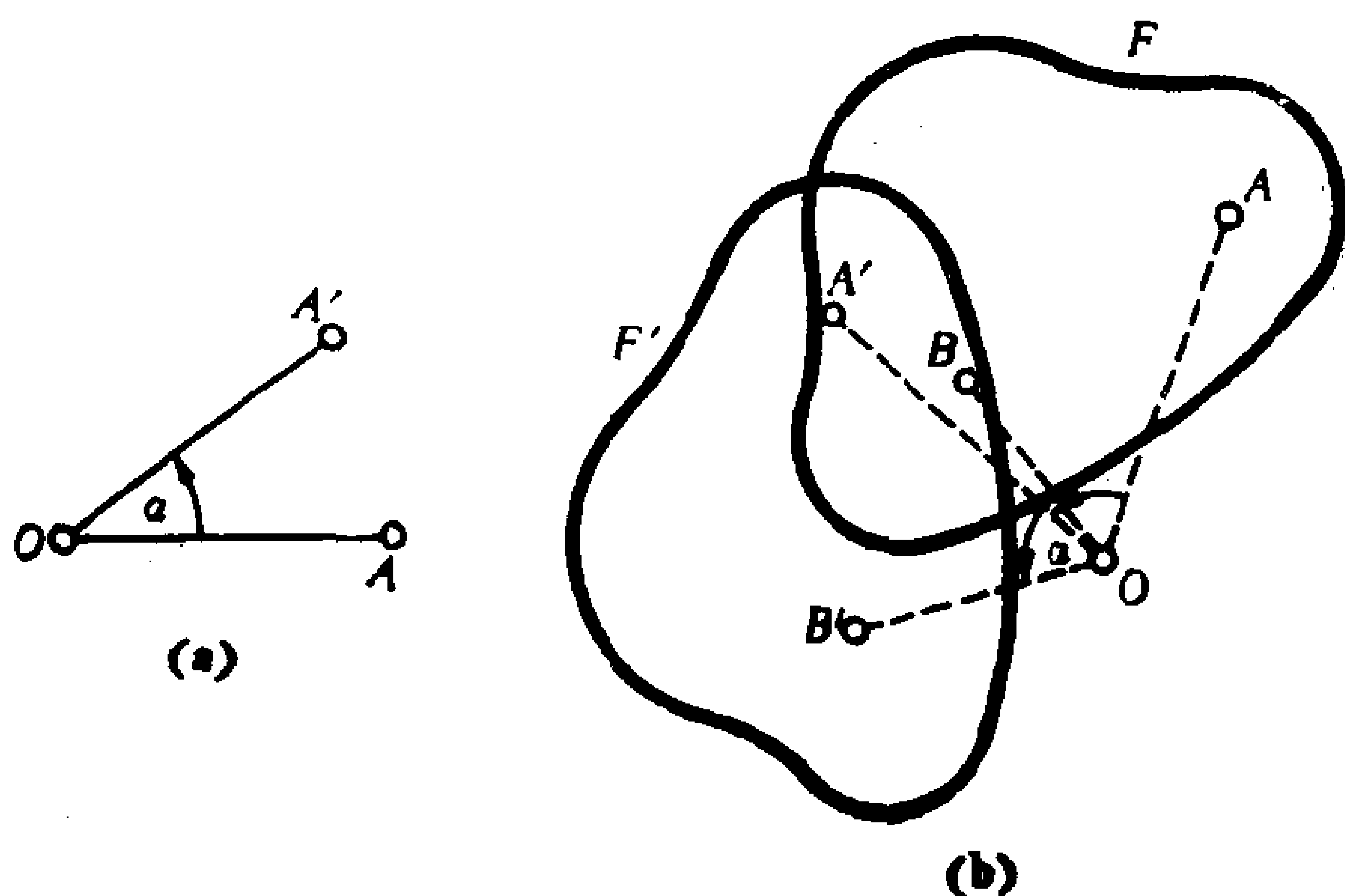


图 23

一个旋转而变得的点的集合，构成一个新图形F'[图23(b)]。有时，我们也可说图形F'是F“整体地”绕O点旋转α角而得到的，这里“整体地”的意思是指F的所有点都在同一圆心O的圆周上移动，并画出相同弧度的弧。如果图形F'是F经过一个旋转(转角为α)所得到的，那么反过来F也可由F'经过同一中心的一个旋转得到，转角为$360°-\alpha$(或在相反方向上转α角)。因此，我们可以说一对图形相差一个旋转。

一个旋转把一条直线l变成另一条直线l'。要作l'，

只需用先把旋转中心O在l上的垂足P旋转，得新点P'，再过P'作垂直于OP'的直线，即为l'[图24(a)]。显然l

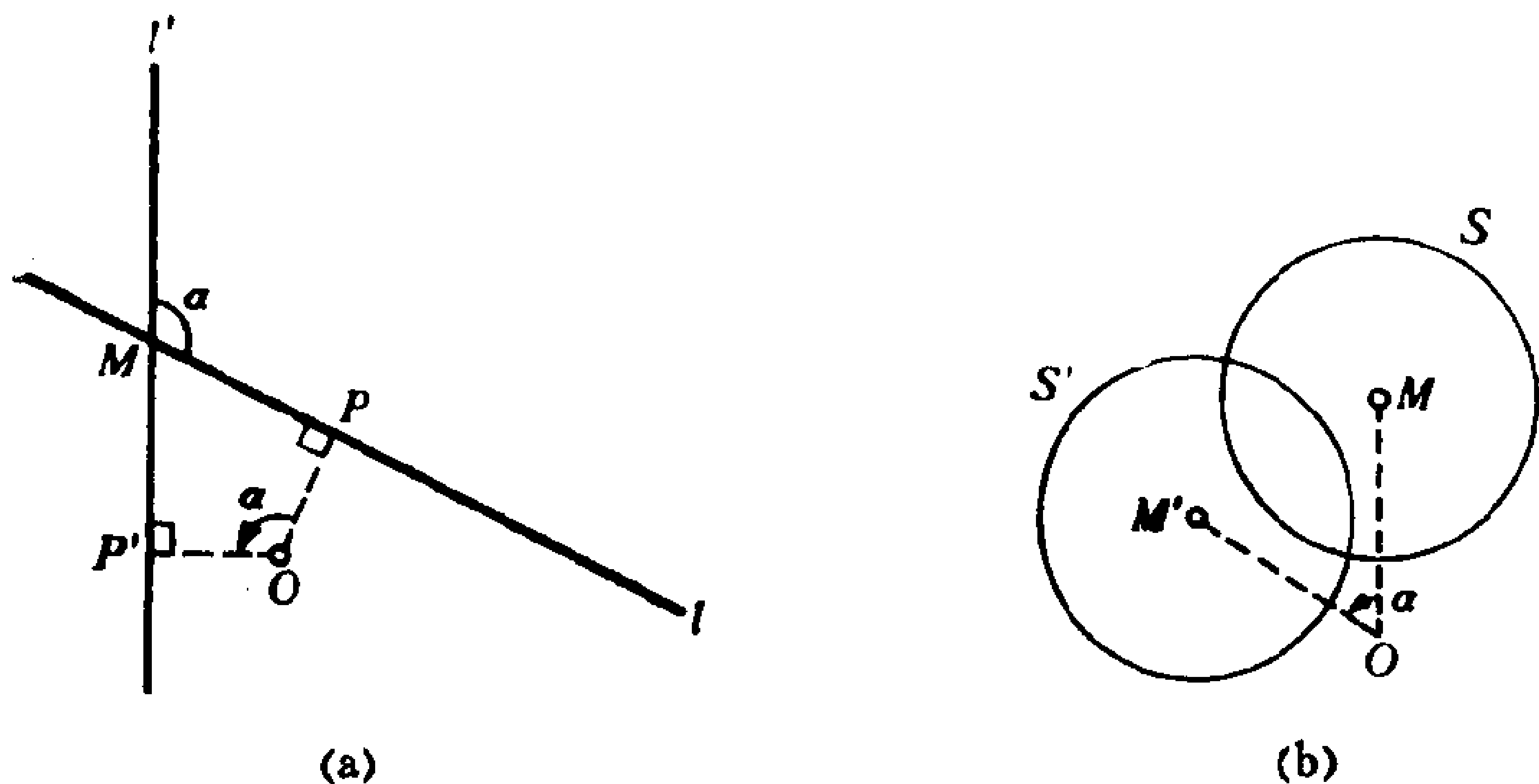


图 24

与l'的夹角就等于转角。要证此结论，只须注意图24(a)中$\angle POP'$和$\angle lMl'$是相等的，因为这两个角的角边互相垂直。

设绕O点的旋转把一个圆S变成一个新圆S'。要作S'，只须先将S的圆心M绕O旋转，再以所得点M'为圆心，S的半径为半径作圆，即为S'[图24(b)]。

如果对旋转方向不作约定，那么对给定点A，条件组

$$1.\quad OA'=OA;\qquad 2.\quad \angle AOA'=\alpha$$

显然能决定两个点A'和A''(图25)。要从中选定一点，可用下面的方法。我们约定把一个旋转方向定作是正的(例如可在一圆周上画个箭头来表示)，而把相反的旋转方向看作是负的。于是，我们就可根据A到A'的旋转方向把旋转角$\alpha=\angle AOA'$分为正负；从而A'和A''对应着不同的(在正负符号上)旋转角。这样，就自然地导出了有向角的概念，它是可正可负的。有向角的概念在初等数学的很多别的问题中也有

用。（在别的地方，还出现有向圆的概念，这是选定了方向的圆周。）

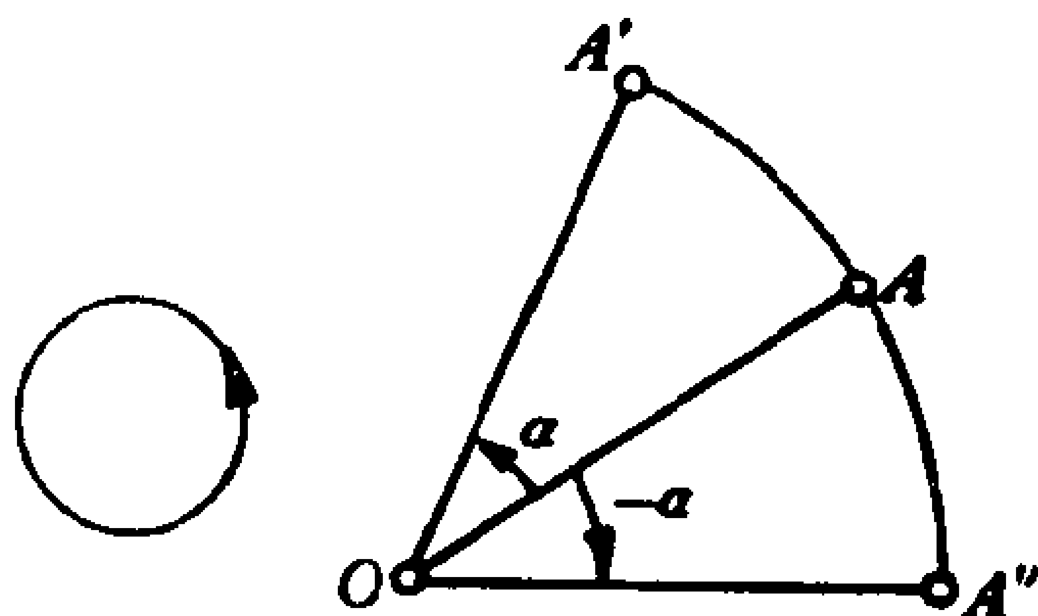


图 25

17．给定两条直线 l_1 和 l_2，一点 A，以及一角 α。试以 A 为圆心作一圆，使得 l_1 和 l_2 在此圆上截下一条弧度与 α 相等的弧。

18．试作一个等边三角形，使得它的三个顶点分别在三条给定的平行直线上，或在三个给定的同心圆上。

19．给定一圆 S，两点 A 和 B，以及一角 α。试在 S 上找两点 C 和 D，使 $CA \parallel DB$，并且弧 CD 的弧度与 α 相等。

20．给定两圆 S_1 和 S_2，一点 A，以及一角 α。试过 A 作两条直线 l_1 和 l_2，使它们的夹角等于 α，并且 S_1 和 S_2 分别在 l_1 和 l_2 上截得的弦相等。

设一个中心为 O，转角为 α 的旋转把图形 F 变为 F'；又设 AB 和 $A'B'$ 是 F 和 F' 上的一对对应线段（图26）。则三角形 OAB 和 $OA'B'$ 全等（$OA=OA'$，$OB=OB'$；又因为 $\angle AOA'=\angle BOB'=\alpha$，所以 $\angle AOB=\angle A'OB'$），因此 $AB=A'B'$。线段 AB 和 $A'B'$ 的夹角等于 α（因为直线 AB 和 $A'B'$ 相差一个转角为 α 的旋转，见图24(a)）；而且，要得到有向线段 $A'B'$，只须将 AB 在这个旋转的方向上转 α 角。于是，我们得到：如果图形 F 和 F' 相差一个转角为 α 的旋转，则 F 和 F' 上的对应线段相等，并且夹 α 角。

下面我们证明这个结论的逆命题：如果从图形 F 的点到

图形 F' 的点有一个对应关系，使得 F 和 F' 上的对应线段相等，且夹角为给定角 α（因此当 F 上的线段在某个确定方

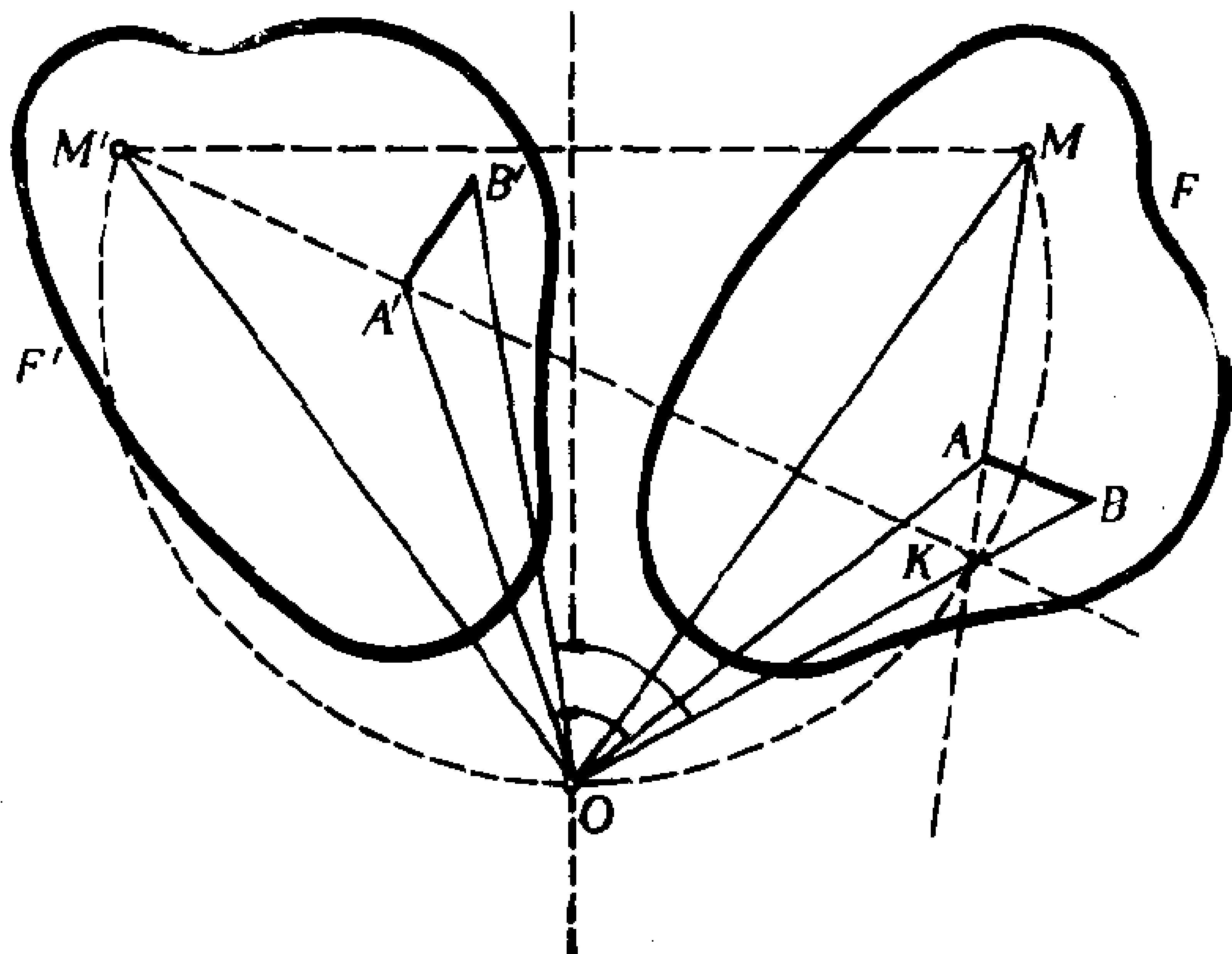


图 26

向上旋转 α 角时，就与它在 F' 上的对应线段平行），则 F 与 F' 相差一个转角为 α 的旋转。事实上，设 M 和 M' 是 F 和 F' 上的一对对应点。在线段 MM' 上作弧，使其所含圆周角为 α①；并设 O 点是此弧与线段 MM' 的中垂线的交点。因为 $OM=OM'$，$\angle MOM'=\alpha$，所以中心为 O，转角为 α 的旋转把 M 变到 M'②。又设 A 和 A' 是图形 F 和 F' 上的任一对别的对应点。比较三角形 OMA 和 $OM'A'$，有 $OM=OM'$（根据 O 点的作法），$MA=M'A'$（由条件）；另外，由

① 即弧上点 X 满足 $\angle MXM'=\alpha$。——中译者

② 满足条件组 $OM=OM'$ 和 $\angle MOM'=\alpha$ 的 O 点有两个（它们分别在 MM' 的两侧），我们根据旋转方向从中决定一个。事实上，要把 F 上的线段旋转 α 角而平行于它在 F' 上的对应线段，那么旋转方向是确定的。选定 O 点，使得以 O 为中心，α 为转角，并把 M 变到 M' 的旋转的方向就是这个方向。

于 OM 与 OM' 的夹角和 MA 与 $M'A'$ 的夹角相等，M,M'，O，K 这四点共圆（K 是直线 AM 与 $A'M'$ 的交点，见图26），而 $\angle OMA$ 和 $\angle OM'A'$ 是立在同一弧上的圆周角，是相等的。于是，三角形 OMA 和三角形 $OM'A'$ 全等。由此得 $OA=OA'$，$\angle AOA'=\angle MOM'$（因为 $\angle A'OM'=\angle AOM$）。这样，以 O 为中心，α 为转角的旋转把 F 上的任一点 A 变到它在 F' 上的对应点 A'，这正是所要证的。

现在我们能够回答下面的问题了：两个旋转之和是什么样的变换？首先，根据旋转的定义，显然两个有同一旋转中心 O 的旋转之和仍是以 O 为中心的旋转；如果这两个旋转的转角分别是 α 和 β（在同一确定的方向上看），则它们之和的转角为 $\alpha+\beta$[图27(a)]。

下面考虑一般情况。设图形 F 被一个中心为 O_1，转角为 α 的旋转变到 F_1，而 F_1 又被一个中心为 O_2，转角为 β 的旋转变到 F'[图27(b)]。如果 F 上的线段 AB 被第一个旋转变到 F_1 上的 A_1B_1，而 A_1B_1 又被第二个旋转变到 F' 上的

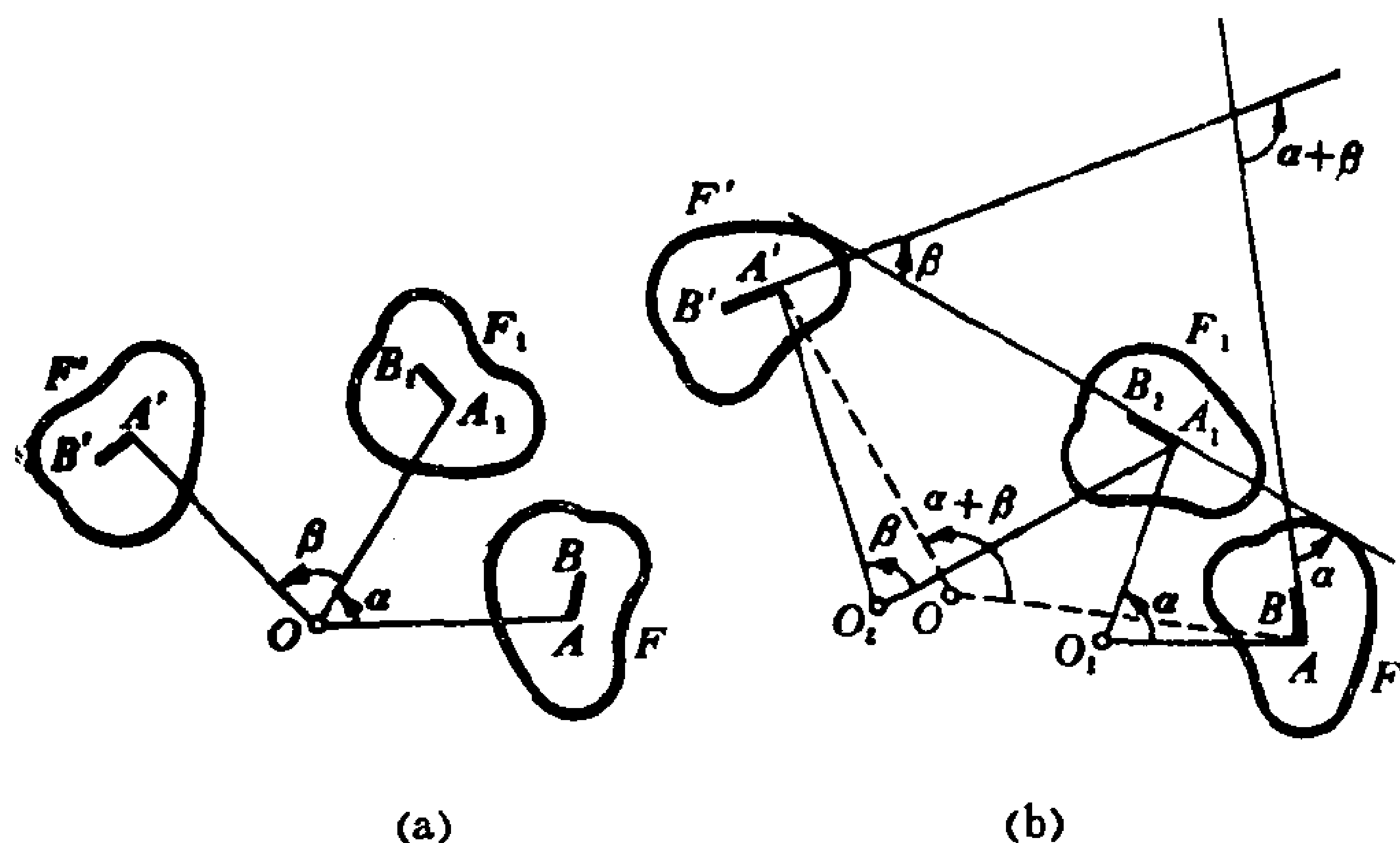


图 27

$A'B'$，则线段 AB 与 A_1B_1 相等，且夹 α 角，而 A_1B_1 又与 $A'B'$ 相等，且夹 β 角。于是，图形 F 和 F' 上的对应线段 AB 与 $A'B'$ 相等，且夹 $\alpha+\beta$ 角。当 $\alpha+\beta=360°$ 时，AB 就平行于 $A'B'$①。应用前面已证的结果，由此可推得：当 $\alpha+\beta\neq360°$ 时，F 和 F' 相差一个转角为 $\alpha+\beta$ 的旋转；而 $\alpha+\beta=360°$ 时，F 和 F' 相差一个平移。我们就有定理：分别以 O_1 和 O_2 为中心，α 和 β 为转角的两个旋转之和，在 $\alpha+\beta\neq360°$ 时，是一个转角为 $\alpha+\beta$ 的旋转；在 $\alpha+\beta=360°$ 时，是一个平移。因为一个转角为 α 的旋转相当于在反方向上转角为 $360°-\alpha$ 的旋转，所以定理结论的后一半可改述如下：如果两个旋转的旋转方向相反，转角相同，则它们之和为一个平移。

现在我们来说明，如何从两个旋转的中心 O_1 和 O_2 以及转角 α 和 β 来决定作为它们之和的那个旋转或平移。先假定 $\alpha+\beta\neq360°$。这时，两个旋转之和仍是一个旋转，其转角为 $\alpha+\beta$，我们要找出它的中心。设第一个旋转的中心 O_1 经过这两次旋转变到 O_1'，则

$$O_1'O_2=O_1O_2,\quad \text{且}\quad \angle O_1O_2O_1'=\beta$$

（见图28(a)，第一个旋转保持 O_1 不动，而第二个旋转把 O_1 变到 O_1'）。设两次旋转之和把某点 O_2'' 变到 O_2，则

$$O_2''O_1=O_2O_1,\quad \text{且}\quad \angle O_2''O_1O_2=\alpha.$$

（第一个旋转把 O_2'' 变到 O_2，而第二个旋转保持 O_2 不动。）由此可知，所要找的中心 O 到 O_1 和 O_1' 是等距的，到 O_2 和 O_2'' 也是等距的。于是 O 就是线段 O_2O_2'' 和 O_1O_1' 的中垂线 l_1

① 确切的说法是：当 $\alpha+\beta$ 是 $360°$ 的整数倍时，图形 F 和 F' 上的对应线段平行。但我们总可假定 α 与 β 都小于 $360°$，这时 $\alpha+\beta$ 是 $360°$ 的整数倍也就是 $\alpha+\beta=360°$。

和 l_2 的交点。但是从图28(a)可清楚看到，l_1 经过 O_1，且 $\angle l_1O_1O_2 = \alpha/2$；而 l_2 经过 O_2，且 $\angle O_1O_2l_2 = \beta/2$。这样，直线 l_1 和 l_2 完全可由这些条件确定，它们的交点就是所求的旋转中心 O。

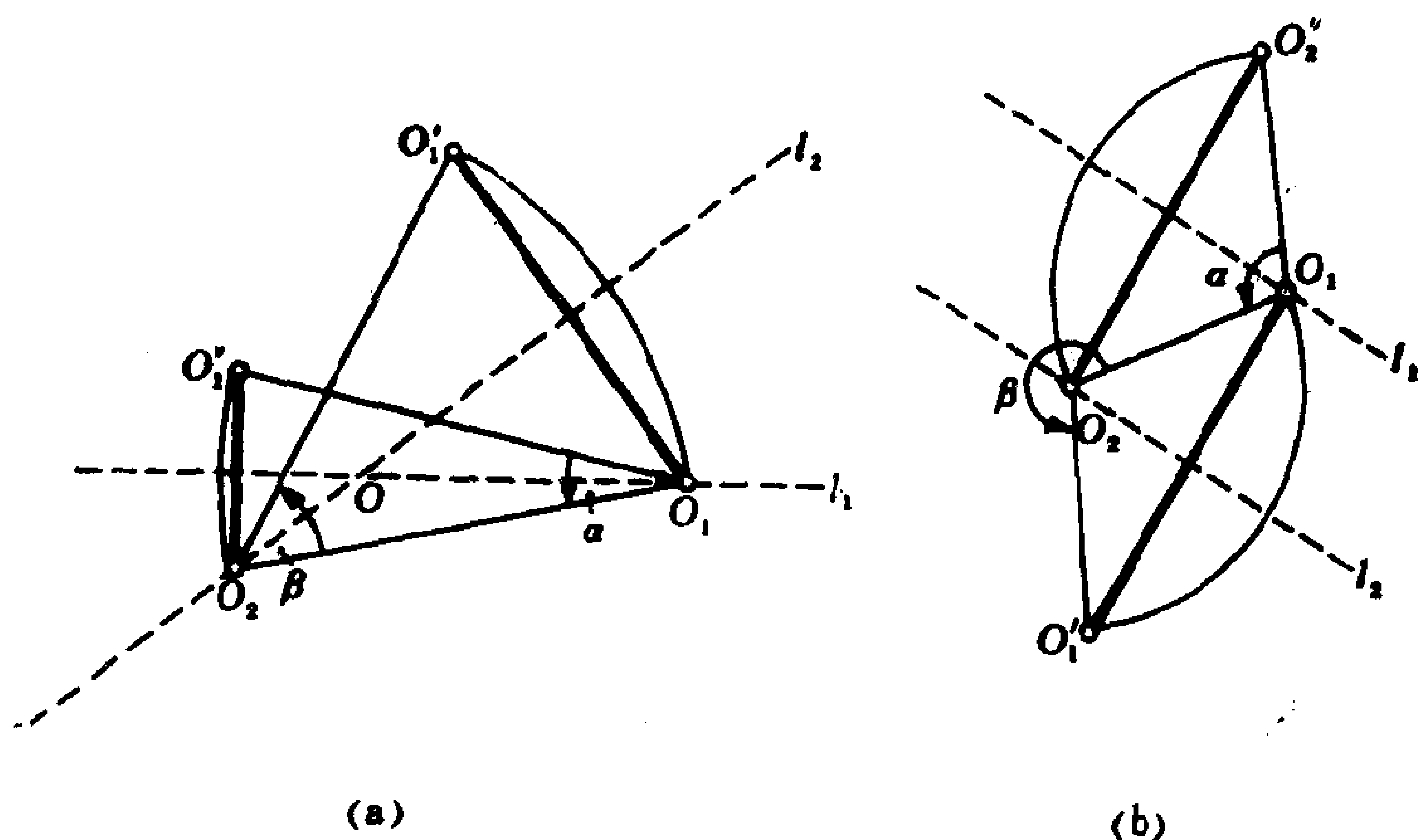


图 28

如果 $\alpha+\beta=360°$，则两个旋转之和是一个平移。设它把 O_1 变到 O_1'，把 O_2'' 变到 O_2。则这个平移完全由 O_1' 或 O_2'' 所确定。O_1' 和 O_2'' 的求法同上面一样(见图28(b)；从图中我们也可清楚看到，上面谈到的 l_1 和 l_2 现在是平行的了，它们垂直于平移的方向，并且相互的距离等于平移距离的一半)。

类似于关于两个旋转之和的定理的证明，我们可证明：一个平移和一个旋转之和(以及一个旋转与一个平移之和)是一个旋转，它与原旋转有相同的转角，但中心不同。怎样根据原旋转的中心 O 与转角 α，以及平移的距离和方向来决定

它们之和的旋转中心呢？请读者自己去解（也可看下面和45页的叙述）。

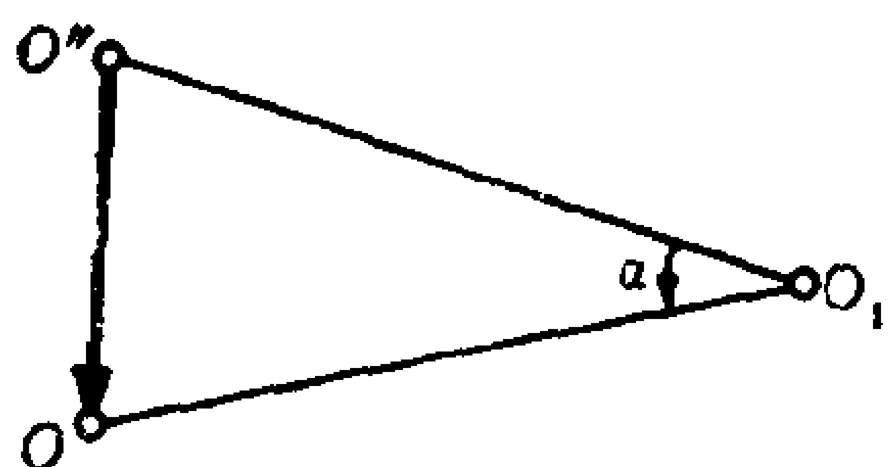


图 29

关于平移与旋转的加法定理也可用下面的方法证明。我们已经知道，如果两个旋转的方向相反，转角相同，则它们的和是一个平移；并且如果它把点 O_2'' 变到第二个旋转的中心 O_2，则 $O_1O_2''=O_1O_2$，$\angle O''_2O_1O_2=\alpha$（见图28(b)，这里的记号都是图中的）。现在，我们把给定的平移分解成两个旋转之和，使得其中第二个旋转与给定的旋转有相同的中心O，相同的转角 α，但旋转方向相反（这时，第一个旋转的中心 O_1 可由条件组

$$O_1O''=O_1O,\qquad \angle O''O_1O=\alpha$$

来决定，其中 O'' 是被给定平移变到O的点；见图29。）这样，所求的平移和旋转之和就被三个旋转之和代替了；而其中后两个旋转相互抵消，只剩下以 O_1 为中心的那个旋转了。

用类似的方法可以证明关于一个旋转和一个平移的加法的定理。

旋转和平移在性质上很相近。从上面的讨论大家都会感觉到这种相近，特别在把平移的加法定理和旋转的加法定理作比较时，会看得更清楚①。平移和旋转统称为**位移**（或称作正常运动、正保距变换）。这些称呼的理由将在第二章第二节中阐明（见54页）。

① 从更高的观点来看，平移可以当作旋转的一种特殊情形。

中心对称是旋转的一种特殊情形，即转角$\alpha=180^\circ$的旋转。当转角$\alpha=360^\circ$时，又得到另一种特殊情形。转角为360°的旋转把平面上每一点变到它原来的位置。这种不改变平面上任何一点位置的变换称为恒同(或恒同变换)。(用变换这个词似乎是不合适的，因为在恒同变换下每个图形都不变动；然而这样称呼会带来许多方便。)

正如中心对称那样，旋转也能当作整个平面的变换，它把平面上每一点A变到一个新点A'①。这个变换的唯一不动点是旋转中心O(除非转角α是360°的整数倍，即旋转为恒同)。旋转没有不动直线(除非转角α是180°的整数倍，即为恒同或中心对称)。

21. 试作一个n边形，使得分别以它的各边为底边，给定角$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为顶角向外作的$n$个等腰三角形的顶点恰为给定的$n$个点(见图30，那儿$n=6$)。

15 题是21题的特殊情形(n是奇数，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=180^\circ$)。第二册第一章中的37题是21题的推广。

22. (a) 任给三角形ABC，在它各边上向外作等边三角形(图31)。试证：这三个等边三角形的中心O_1,O_2,O_3恰是一个等边三角形的顶点。

如果题中三个等边三角形不是作在三角形ABC之外，而是作在ABC的内侧，结论还正确吗？

(b) 以三角形ABC的各边为底边，向外作等腰三角形BCA_1,ACB_1和ABC_1，使得它们的顶角A_1,B_1,C_1分别等于α,β和γ。试证：如果$\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$，则三角形$A_1B_1C_1$的

---

① 见12页脚注①。

各个角分别为 $\alpha/2$, $\beta/2$ 和 $\gamma/2$；因此它们与三角形 ABC 的形状无关。

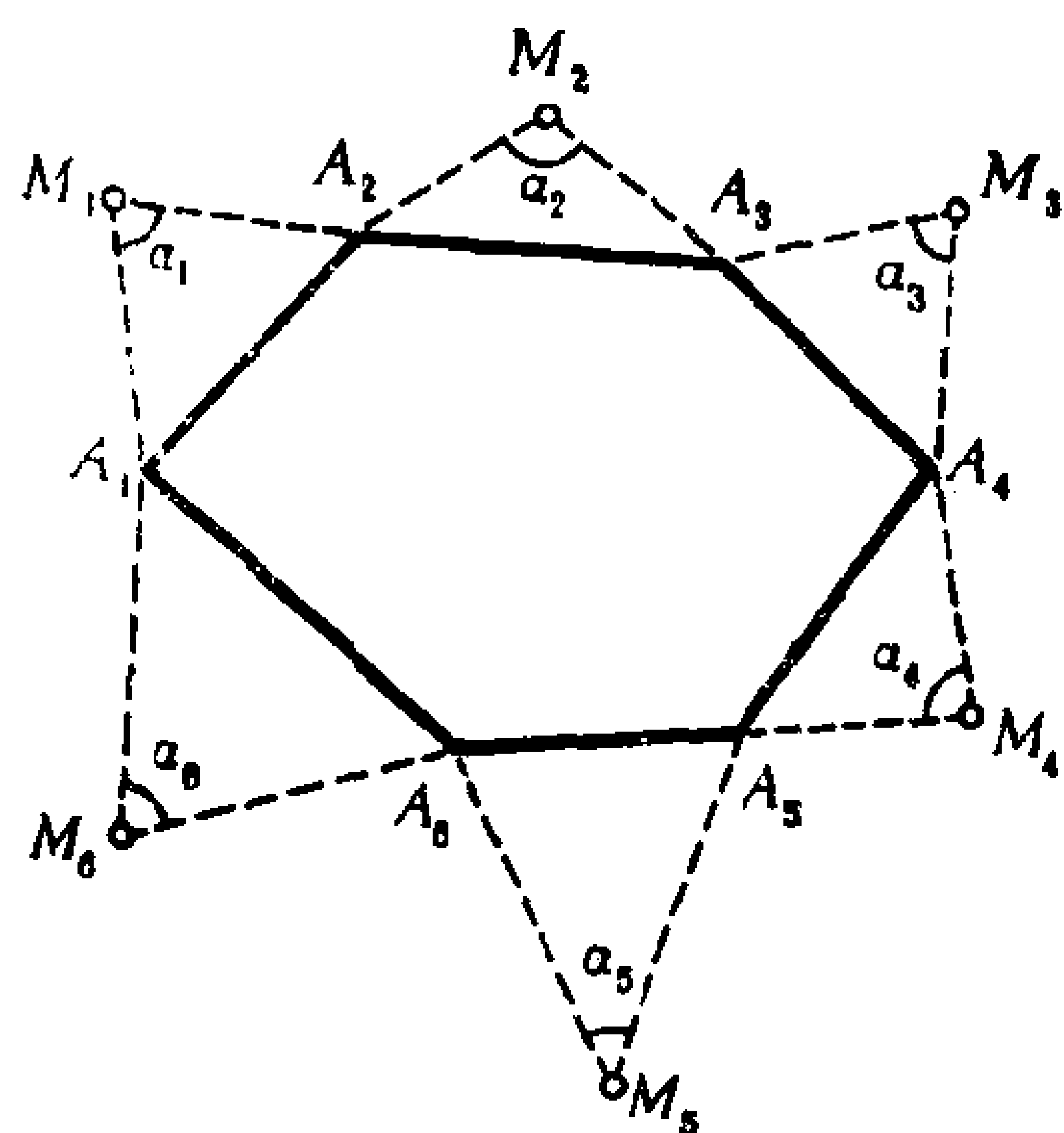


图 30

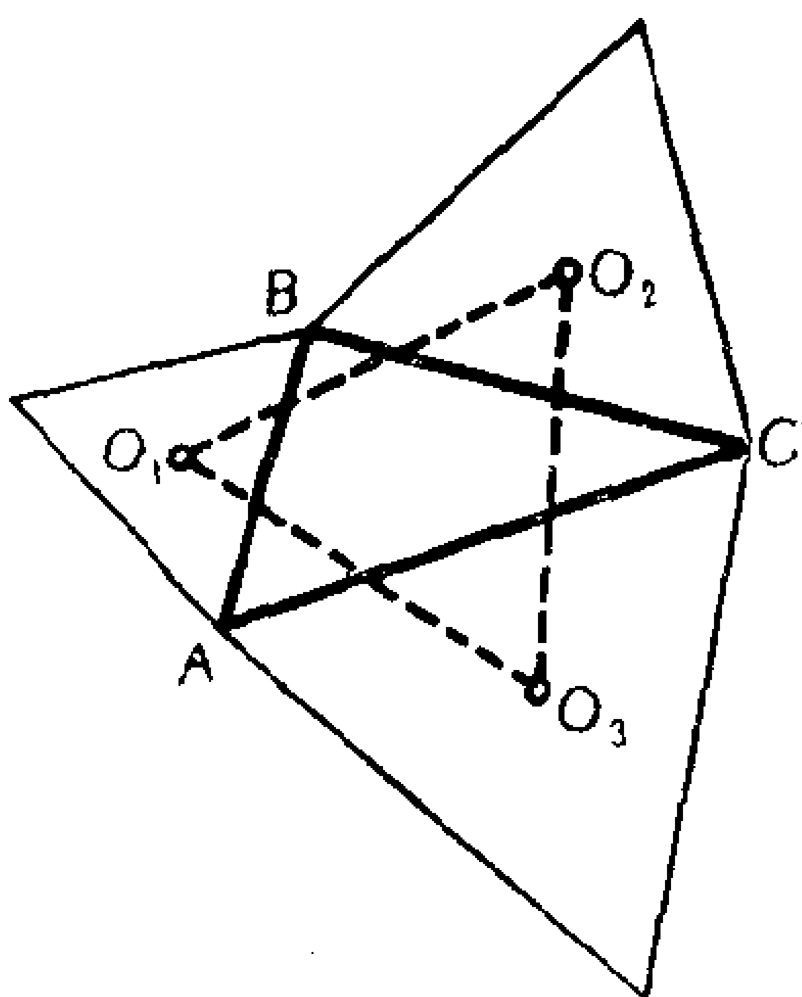


图 31

如果题中各等腰三角形不向外作，而是作在三角形 ABC 的内侧，结论仍有效吗？

不难看出，(a)是(b)的特殊情形($\alpha=\beta=\gamma=120°$)。

23．在三角形 ABC 的各边上作等边三角形 BCA_1，ACB_1 和 ABC_1，使得 A_1 和 A 在 BC 边的两侧，B_1 和 B 在 AC 边的两侧，但是 C_1 和 C 在 AB 边的同一侧。设 M 是三角形 ABC_1 的中心。试证：三角形 A_1B_1M 是等腰三角形，并且顶角为120°(图32)。

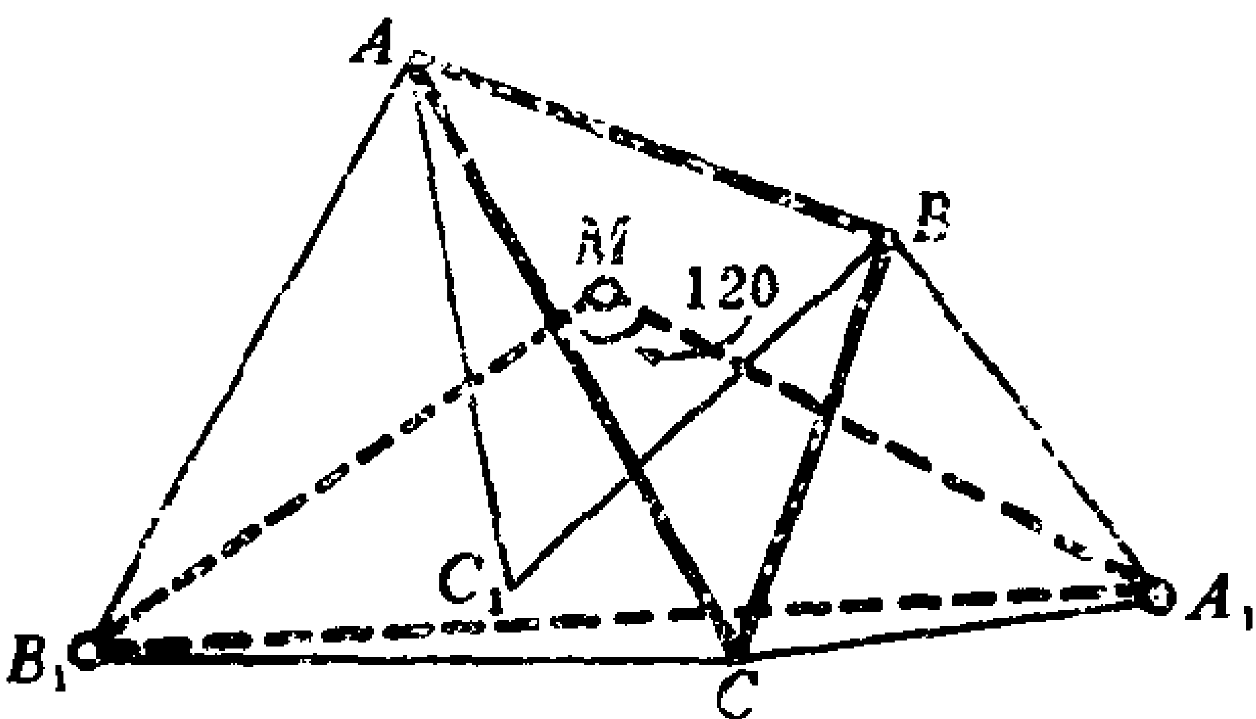


图 32

24．(a) 在一个任给凸四边形 $ABCD$ 的各边上作等边

三角形 $ABM_1, BCM_2, CDM_3, DAM_4$，使得第一、三两个在四边形之外，另两个在四边形所在的一侧[图 33(a)]。试证：四

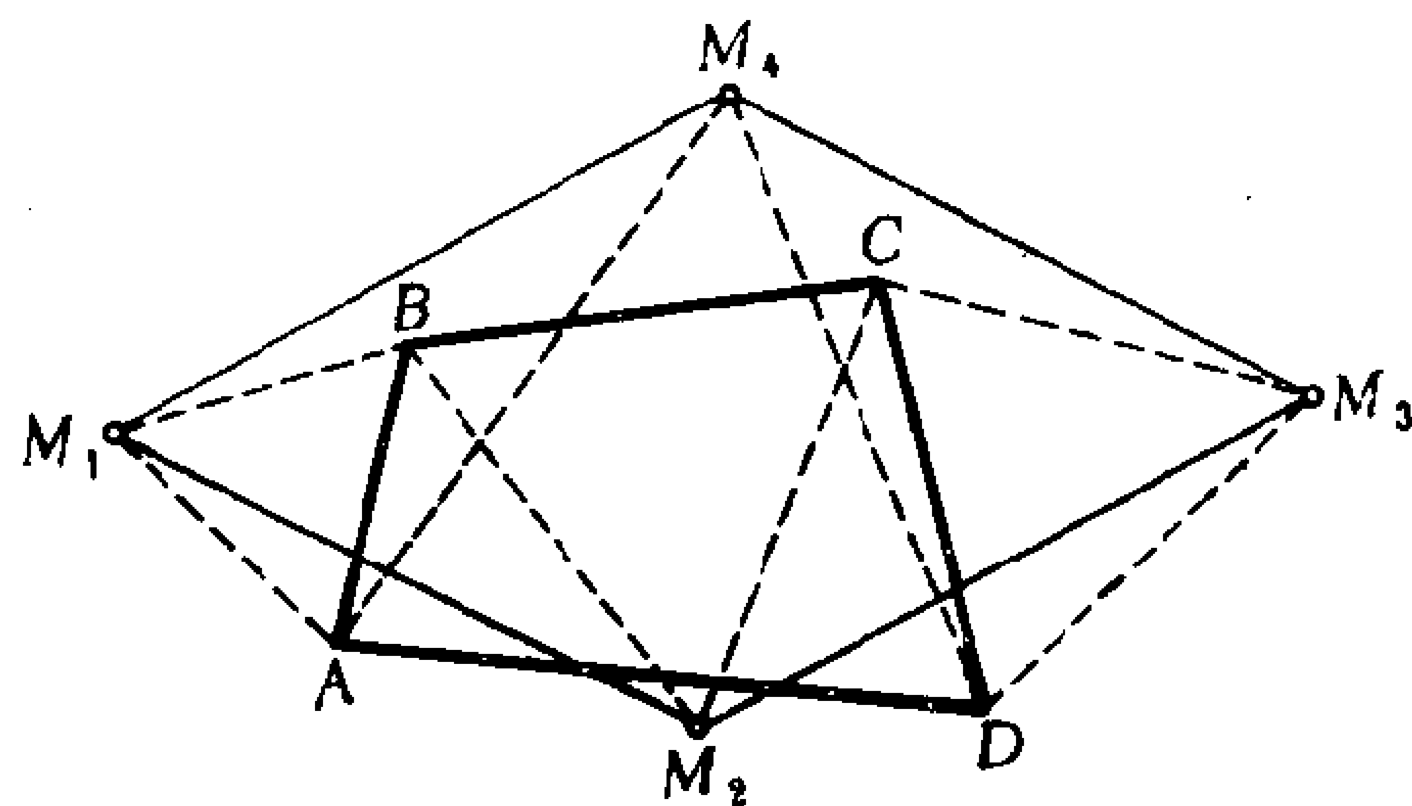


图 33(a)

边形 $M_1M_2M_3M_4$ 是平行四边形。（在特殊情形，这个平行四边形可退化为一线段。）

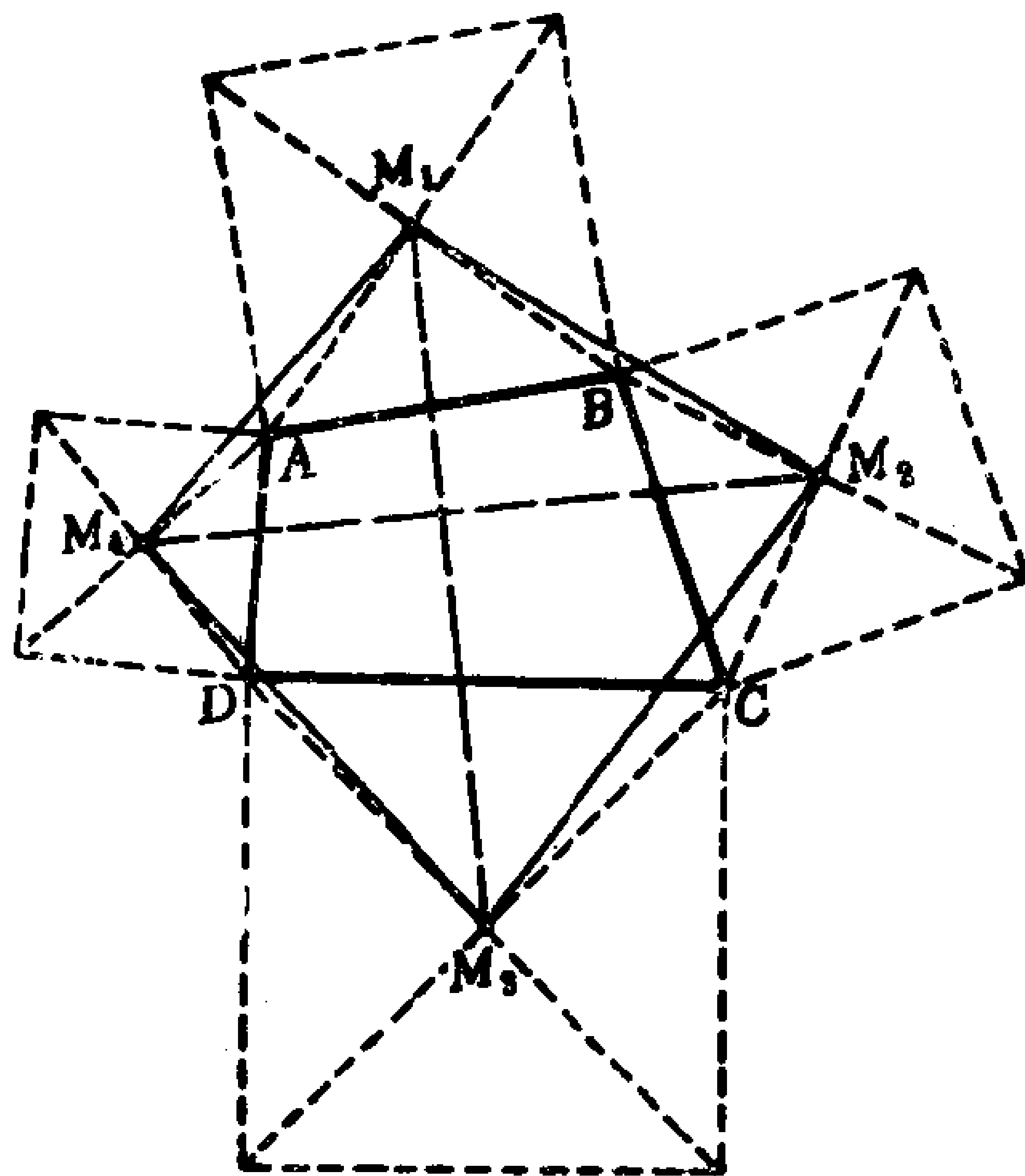


图 33(b)

(b) 在一个任给凸四边形 $ABCD$ 的各边上向外作正方形；记它们的中心为 M_1, M_2, M_3, M_4。试证 $M_1M_3 = M_2M_4$，且 $M_1M_3 \perp M_2M_4$[图33(b)]。

(c) 在一个平行四边形的各边上向外作正方形。试证：它们的中心 M_1, M_2, M_3 和 M_4 恰是一个正方形的四个顶点。

如果题中的各个正方形都与平行四边形处在相应边的同一侧，结论还正确吗？

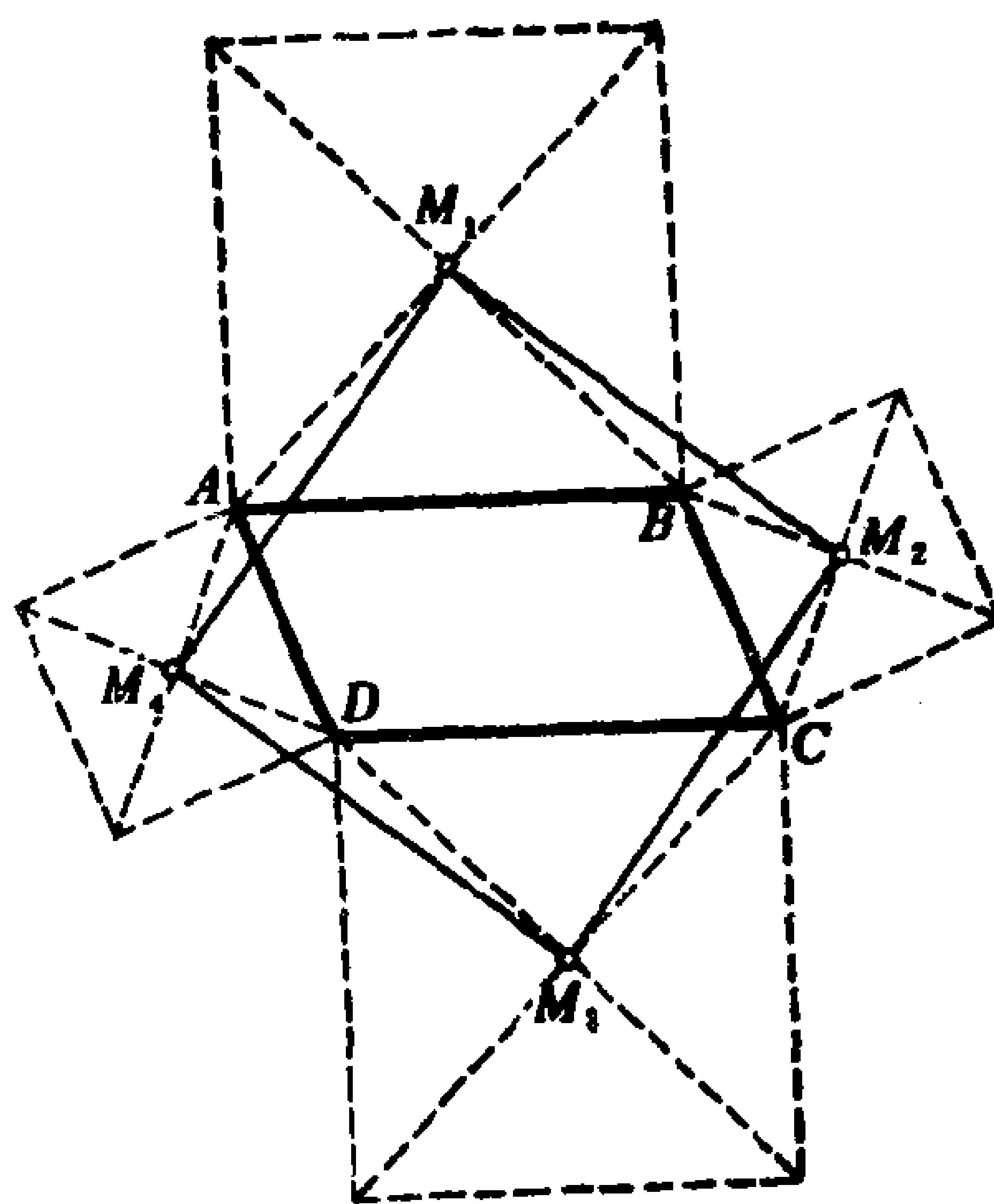


图 33(c)

第二章　对　　称

1. 反射与滑动反射

在平面上取定直线 l，作为我们将讨论的反射的对称轴。称一点 A' 是另一点 A 在 l 上的反射象，如果线段 AA' 垂直于 l，且被 l 平分[图34(a)]。如果 A' 是 A 在 l 上的反射象，那么反过来 A 也是 A' 在 l 上的反射象。因此，我们可以说一对点互为在给定直线上的反射象。当 A' 是 A 在 l 上的反射象时，我们也可说 A' 关于直线 l 对称于 A。

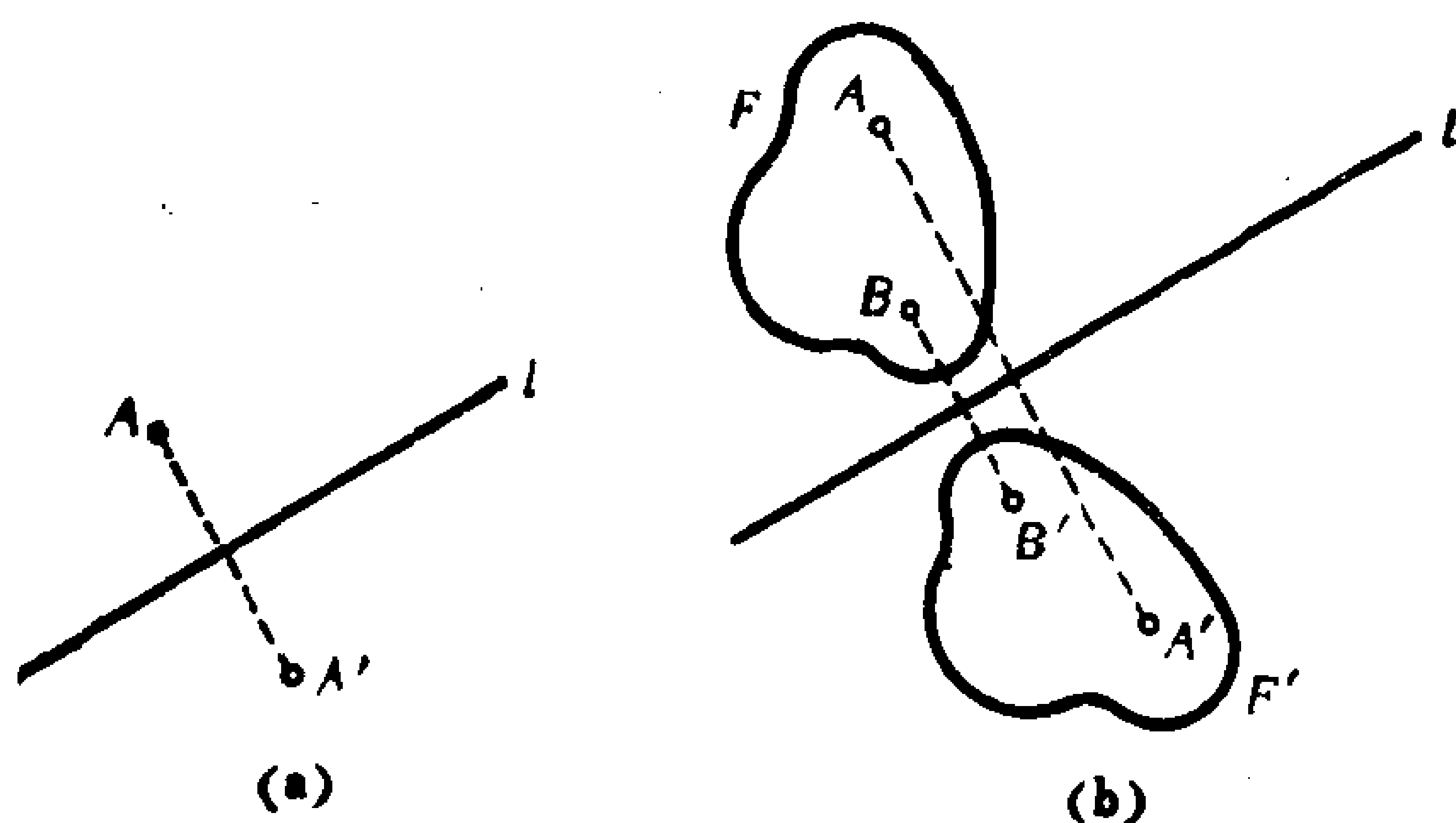
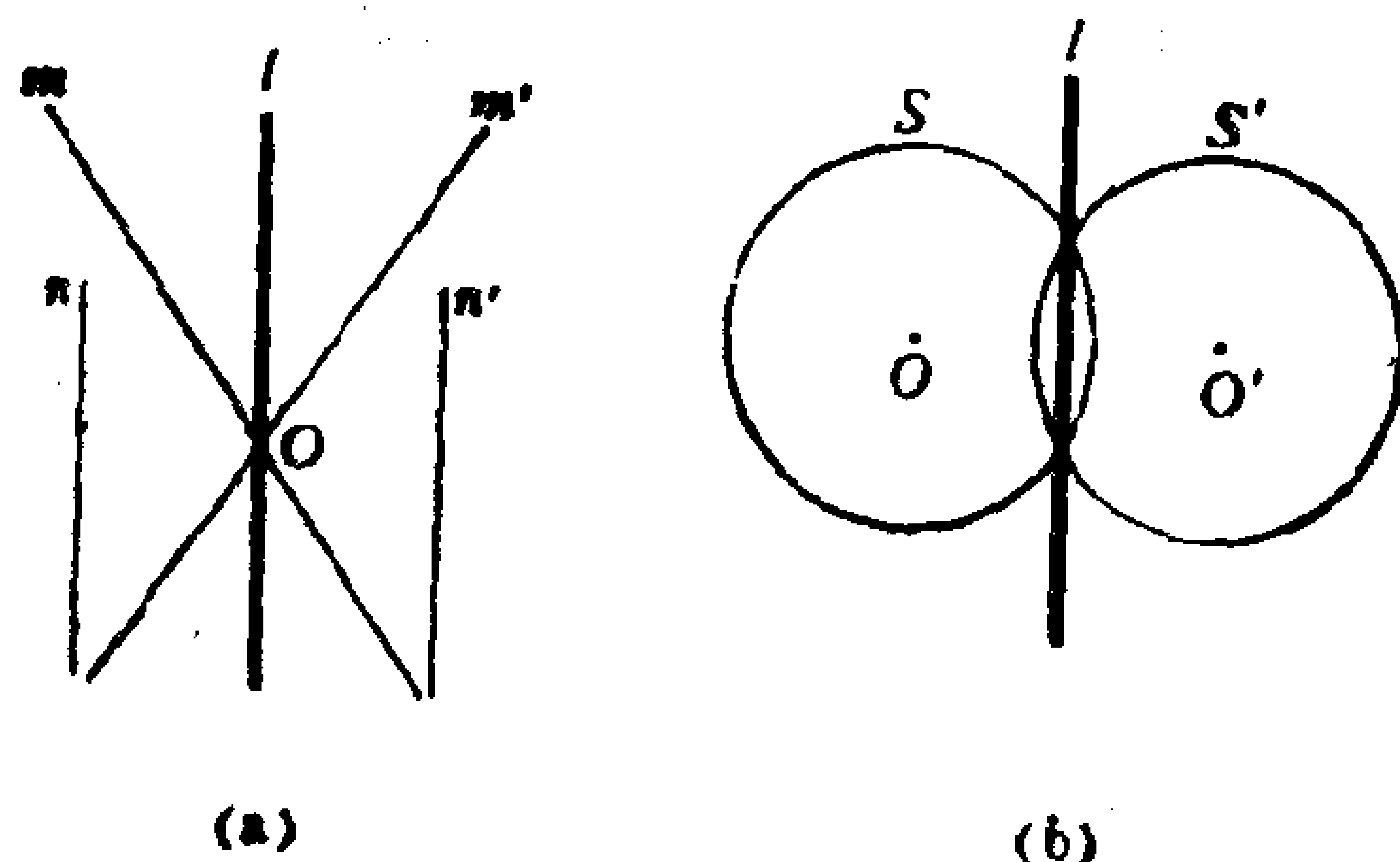


图　34

一个图形 F 的所有点在直线 l 上的反射象的集合，构成一个新图形 F'，称为 F 在 l 上的反射象[图34(b)]。显然，这时反过来 F 也是 F' 在 l 上的反射象。一条直线被在 l 上的反射变成一条新的直线；而平行于 l 的直线的反射象也平行于 l，与 l 相交于 O 点的直线的反射象也与 l 相交于 O 点

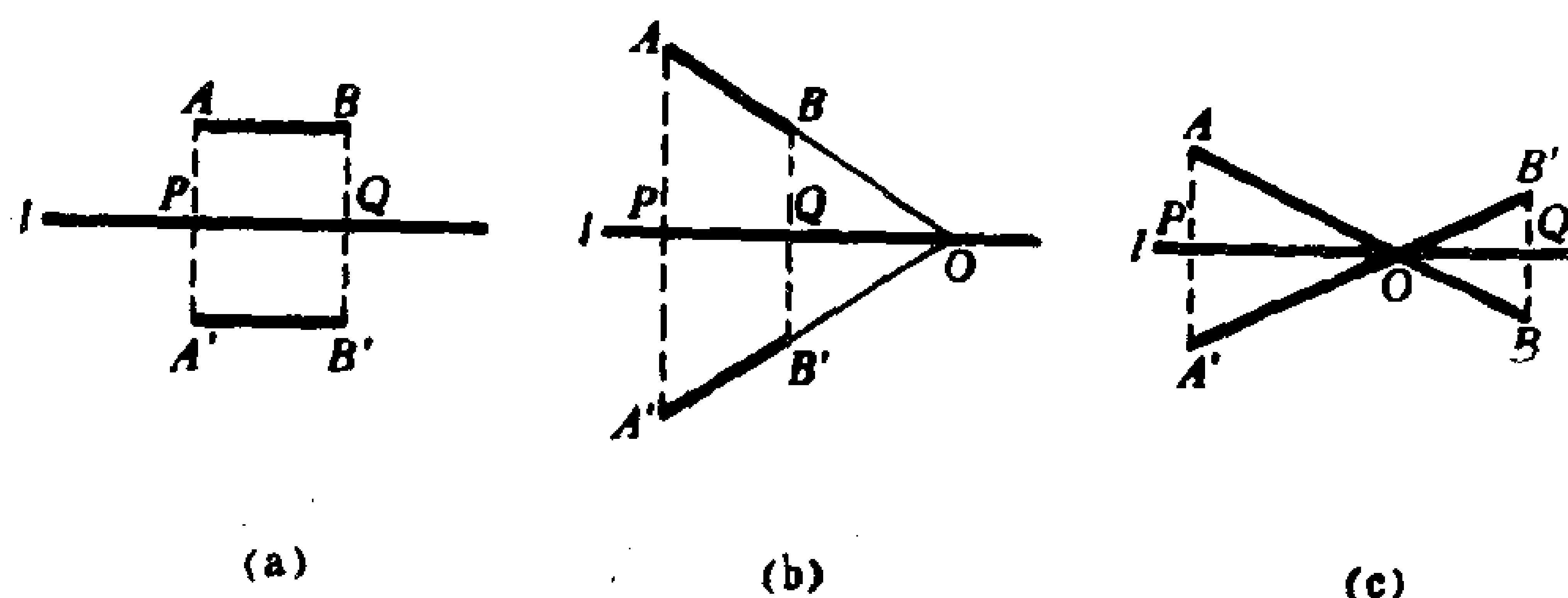
(图53(a)中，直线m变为m'，n变为n')。一个圆被反射成一个与它全等的圆[图35(b)]。(作为例子，我们来证明最后



(a)　　(b)

图 35

这个结论。为此，只要注意每个线段AB的反射象$A'B'$与AB等长。在图36(a)中，$AB=PQ=A'B'$；而在图36(b)，(c)中，有$\triangle AOP\cong\triangle A'OP$，$\triangle BOQ\cong\triangle B'OQ$，从而$OA=OA'$，$OB=OB'$，因此$AB=A'B'$。由此可推出，到点$O$的距离为$r$的点的轨迹的反射象是到$O'$($O$关于$l$的反射象)的距离为$r$的点的轨迹；也就是说圆$S$的反射象是与它全等的圆$S'$。)



(a)　　(b)　　(c)

图 36

25.(a) 给定直线MN和在它同侧的两点A,B。试在

直线 MN 上找一点 X，使得直线 AX 和 BX 与 MN 的夹角相等，即

$$\angle AXM=\angle BXN.$$

(b) 给定直线 MN 和在它同侧的两个圆 S_1,S_2。试在 MN 上找一点 X，使得 S_1 和 S_2 各有一条过 X 的切线，它们与 MN 夹相等的角。

(c) 给定直线 MN 和在它同侧的两点 A,B。试在 MN 上找一点 X，使得线段 AX 和 BX 与 MN 所夹的两个角中，有一个是另一个的两倍(如图37中，$\angle AXM=2\angle BXN$)。

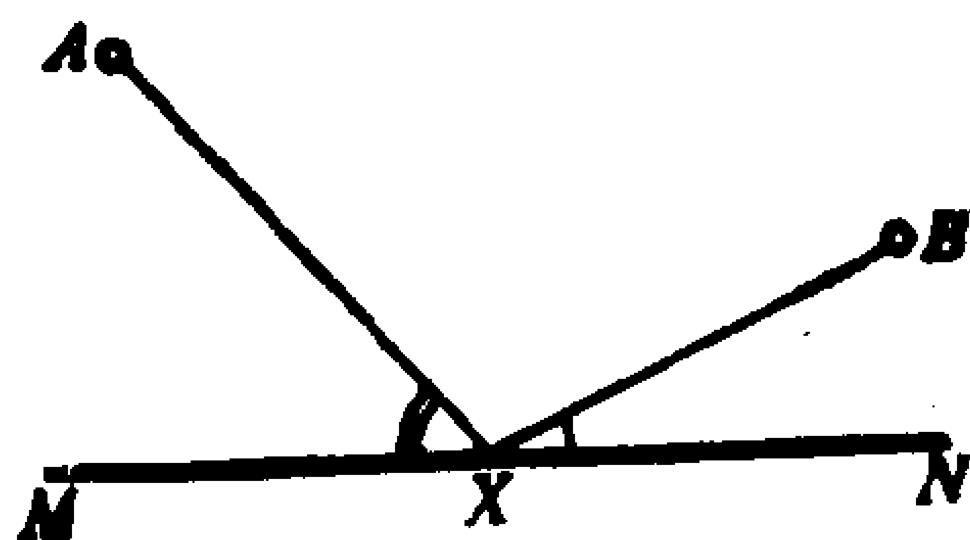


图 37

26.(a) 给定三条直线 l_1,l_2 和 l_3，它们相交于一点；在其中一条直线上取定一点 A。试作一个三角形 ABC，使得 l_1,l_2 和 l_3 恰是它的三条分角线。

(b) 给定一个圆 S 和过 S 的圆心的三条直线 l_1,l_2,l_3。试作一个三角形 ABC，使它的顶点分别在三条直线上，而且它的内切圆就是 S。

(c) 给定相交于一点的三条直线 l_1,l_2 和 l_3，又在其中一条上取定一点 A_1。试作一个三角形 ABC，使得 A_1 是 BC 边的中点，并且 l_1,l_2 和 l_3 是它的各边的中垂线。

后面39题的(b)和(a)分别是26题(a)和(c)的推广。

27.(a) 给定一边 AB，AB 上的高 h，以及 AB 边的两邻角之差 γ，求作三角形。

(b) 给定两边和它们与第三边的夹角之差 γ，求作此三角形。

28. 给定一个角 MON 和角内两点 A，B。试在射线 OM 上找一点 X，使得直线 XA，XB 与射线 ON 的两个交点 Y，Z 和 X 一起构成一个等腰三角形，即 $XY = XZ$（图38）。

29. (a) 给定各边的长度，求作四边形 $ABCD$，使得对角线 AC 平分角 A。

(b) 给定相邻边 AB 和 AD 的长度，并给定 $\angle B$ 和 $\angle D$，求作一个四边形 $ABCD$，使它有内切圆（即有一圆与它的四边都相切）。

30. (a) 一个台球在碰撞台球桌的一桌边时，反弹路线遵循这样的规律：击向桌边的直线和弹离的直线与桌边等斜。假定台球桌是由 n 条直线 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 所围成；设 A，B 是球桌上给定两点。试问：由哪个方向打击位于 A 点的台球，可使它相继碰弹 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 后经过 B 点？（见图39，那儿 $n = 3$。）

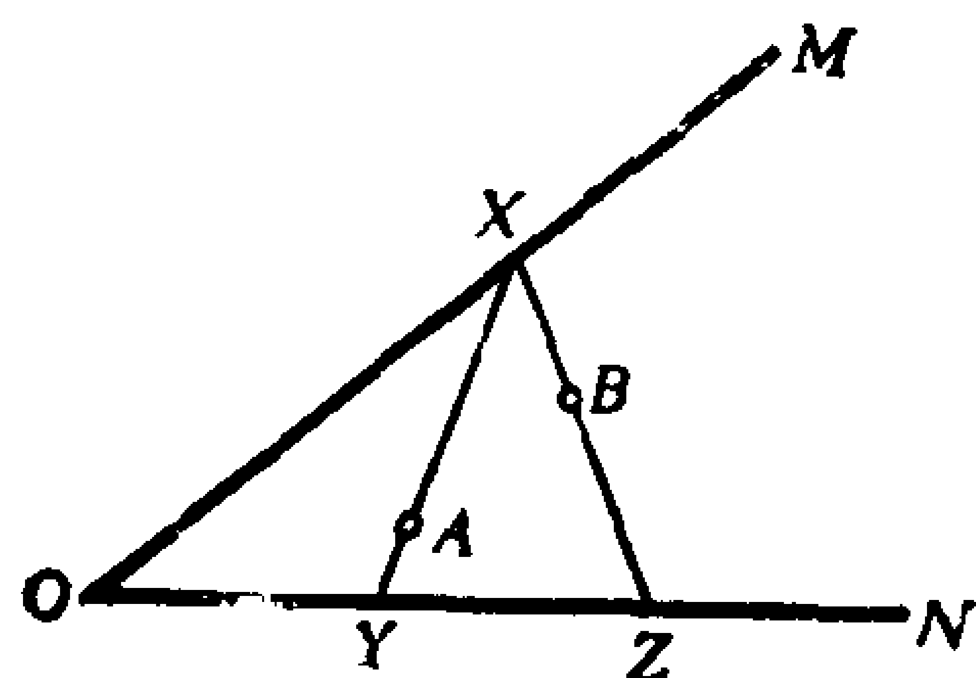


图 38

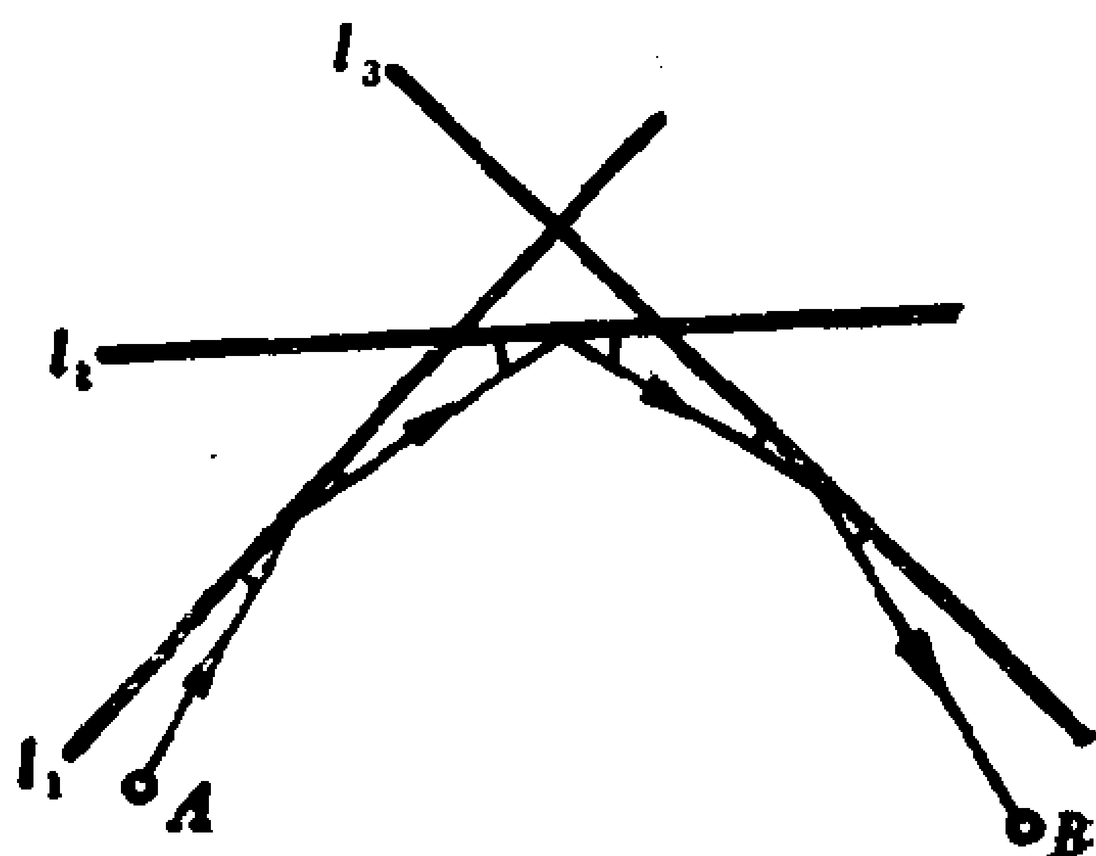


图 39

(b) 设 $n = 4$，l_1, l_2, l_3, l_4 构成一个矩形，并且 B 点与 A 点重合。试证：若一个台球从 A 点出发，碰弹各边后又回到原处，则台球走过的路程等于矩形的两条对角线之和（因而与 A 点的位置无关）。又若球回到 A 点时不停止，则它又将在

四条边上各碰弹一次后再回到A点处。

31.(a) 给定直线l和位于它两侧的两点A,B。试在l上找一点X，使它到A,B的距离之和$AX+XB$等于给定值a。

(b) 给定直线l和分居它两侧的两点A,B。试在l上找一点X，使它到A,B的距离之差$AX-XB$等于给定值a。

32.(a) 给定三角形ABC，并设它三条高的交点是H。试证：H在三角形各边上的反射象都在三角形的外接圆上。

(b) 已知三角形三条高的交点在各边上的反射象H_1,H_2,H_3,求作此三角形。

三角形三条高的交点称为它的垂心。

33.给定在平面上四点A_1,A_2,A_3,A_4，其中A_4是三角形$A_1A_2A_3$的垂心.S_1,S_2,S_3,S_4分别是三角形$A_2A_3A_4$,$A_1A_3A_4$,$A_1A_2A_4$;$A_1A_2A_3$的外接圆，它们的圆心分别为O_1,O_2,O_3,O_4。试证：

(a) A_1是三角形$A_2A_3A_4$的垂心；A_2是三角形$A_1A_3A_4$的垂心；A_3是三角形$A_1A_2A_4$的垂心。

(b) S_1,S_2,S_3,S_4是全等的。

(c) 四边形$O_1O_2O_3O_4$是四边形$A_1A_2A_3A_4$经过关于某点O的中心对称所变得的(图40)。(也就是说，如果四个点A_1,A_2,A_3,A_4中的任一点都是其它三点构成三角形的垂心，那么分别联结每一点与其它三点决定的圆的圆心的四条线段相交于一点O，且O恰是每条线段的中点。)

34.在圆S上给定四点A_1,A_2,A_3,A_4,把三角形$A_1A_2A_3$,$A_1A_2A_4$,$A_1A_3A_4$,$A_2A_3A_4$的垂心分别记作H_4,H_3,H_2,H_1。试证：

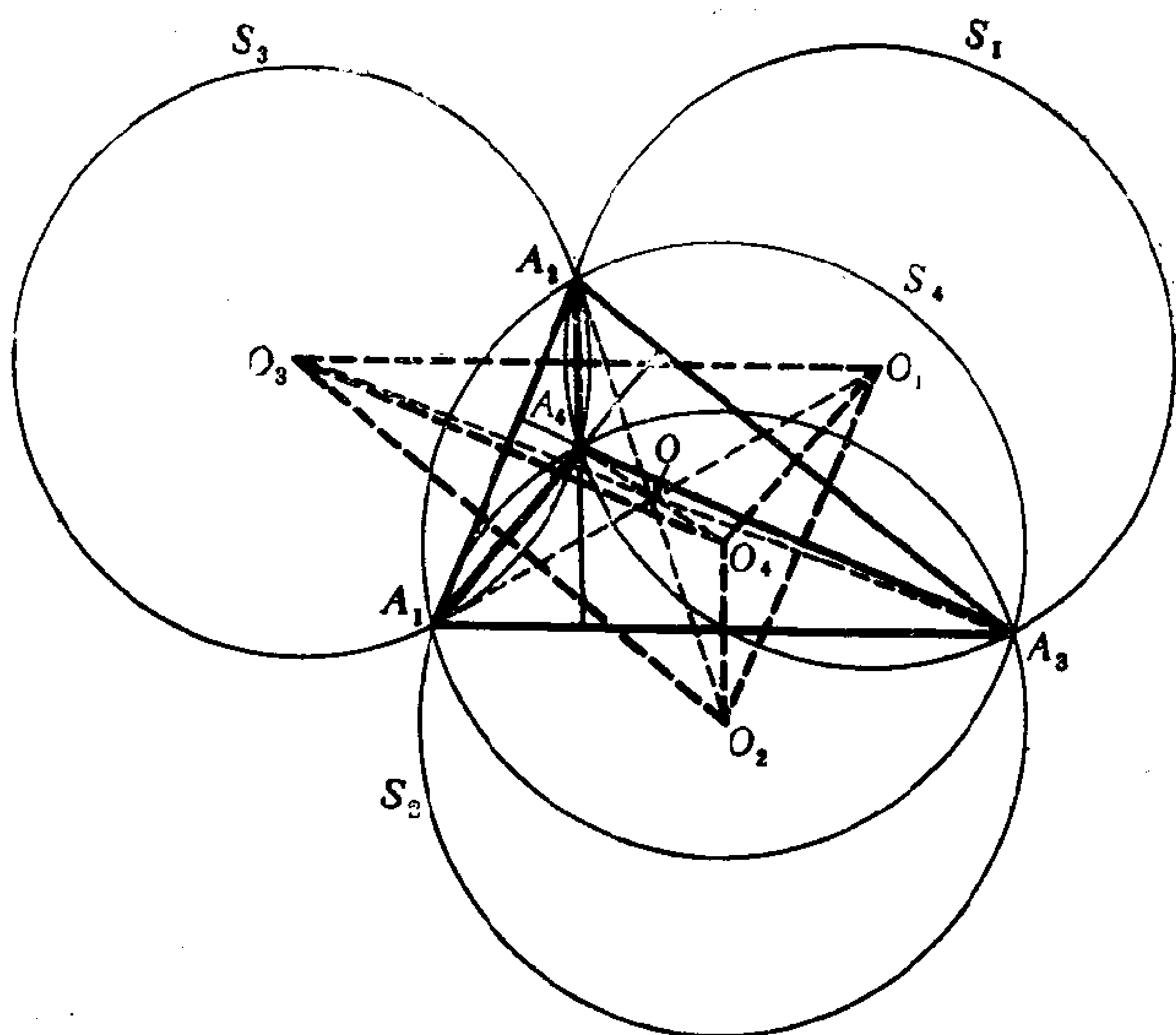


图 40

(a) 四边形 $H_1H_2H_3H_4$是四边形 $A_1A_2A_3A_4$经过关于某点 H 的中心对称所变得的(图41)。(也就是说，如果四点 A_1, A_2, A_3, A_4共圆，则分别联结每一点与其它三点所构成三角形的垂心的四条线段交于同一点，且此点即各线段的中点。)

(b) 下列各点组(每组四个点)都是共圆的，且它们决定的圆都与 S 全等：A_1, A_2, H_3, H_4；A_1, A_3, H_2, H_4；A_1, A_4, H_2, H_3；A_2, A_3, H_1, H_4；A_2, A_4, H_1, H_3；A_3, A_4, H_1, H_2；H_1, H_2, H_3, H_4。

35.试证：若一个多边形有多于两个对称轴，则这些对称轴交于一点。

还有一批利用在直线上的反射来解答的习题，放在本书第二册第二章的第二节中。

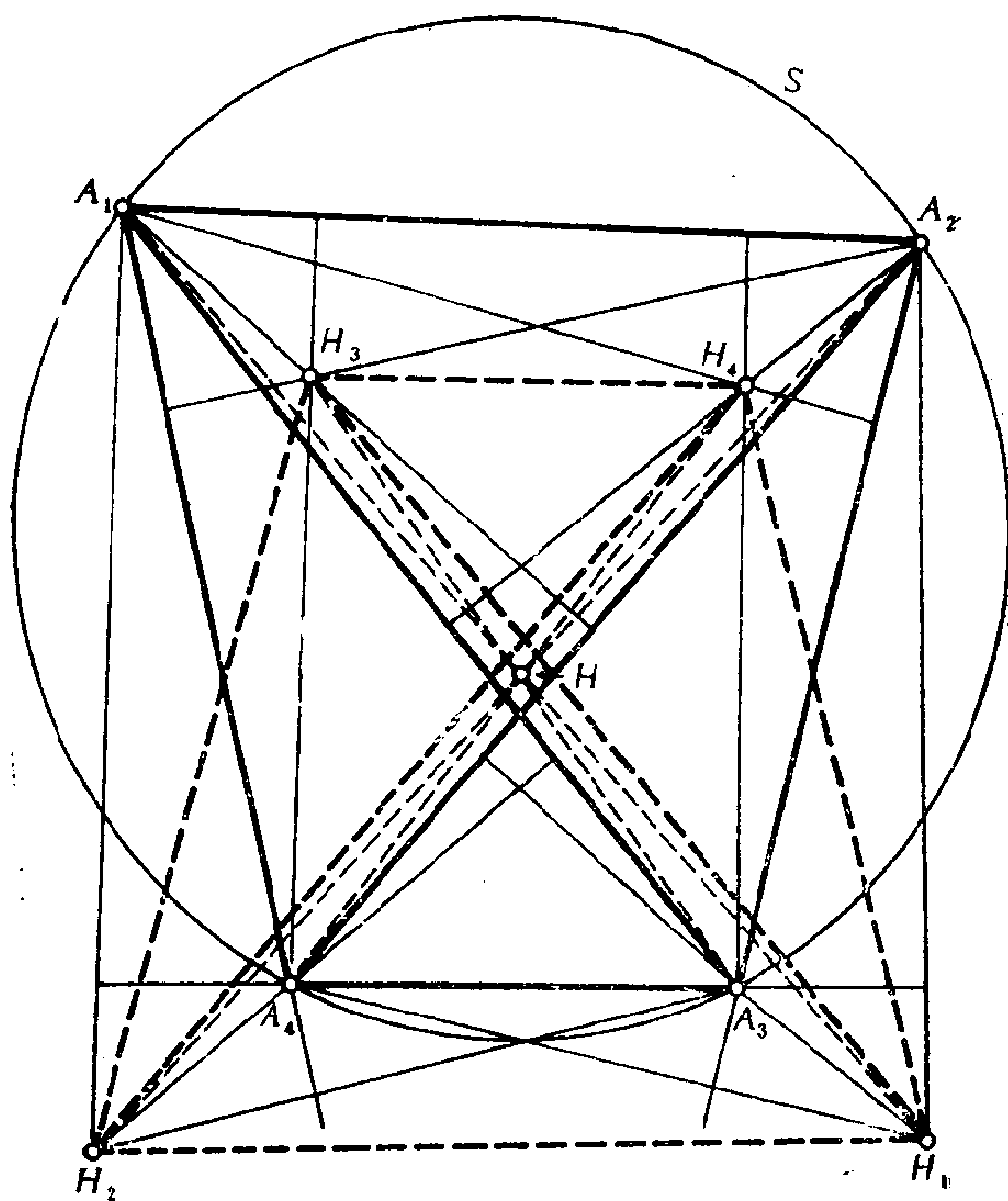


图 41

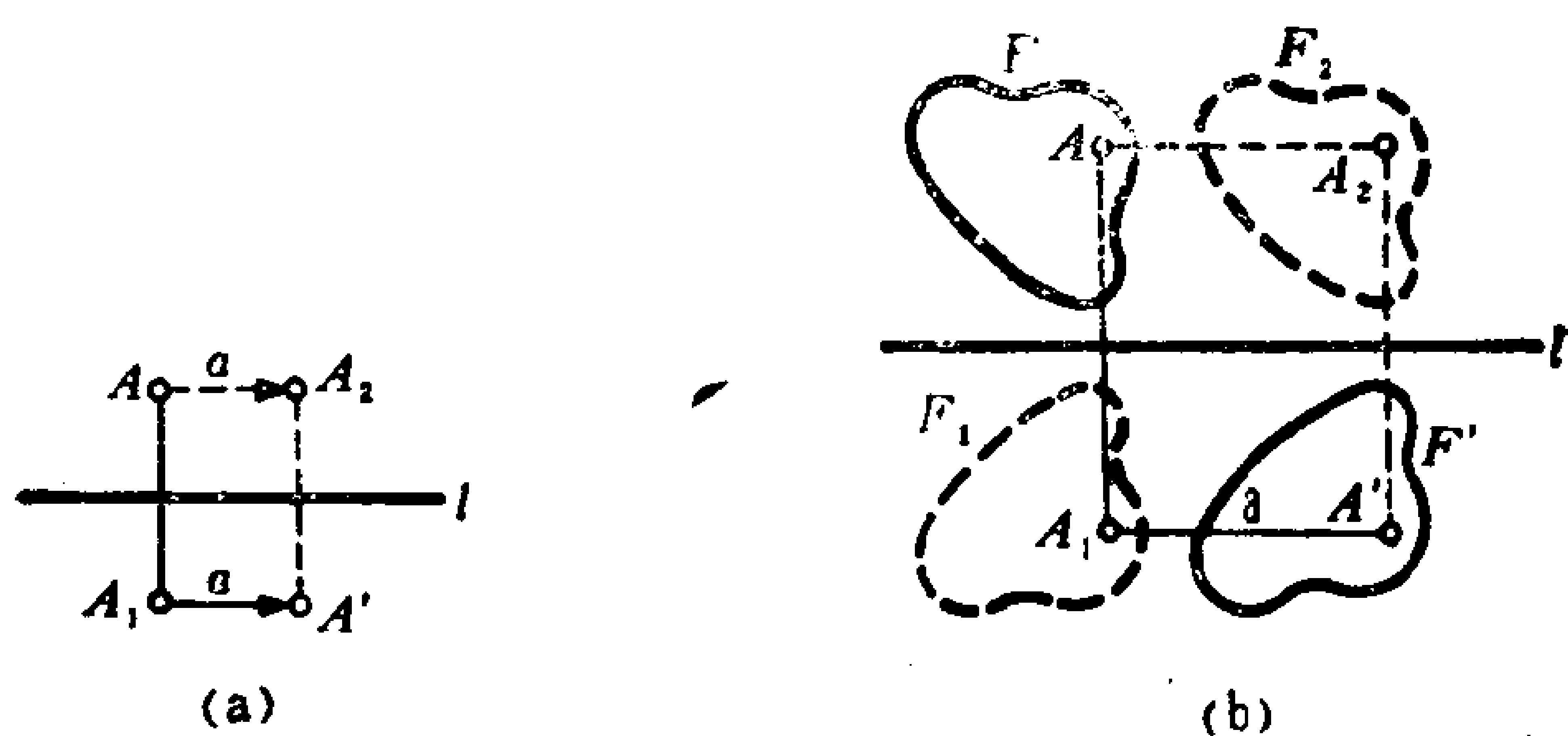


图 42

如果 A_1点是 A 点在直线 l 上的反射象，而 A' 点又是 A_1 沿着同一直线 l 的方向平移距离 a 而得到的点[图42(a)]，我们就说 A' 是 A 经过一个以 l 为轴，距离为 a 的滑动反射所变得的点。换句话说，一个滑动反射是在一条直线 l 上的反射和在这直线方向上的一个平移之和。(从图42(a)中容易看出，和的次序可随便选择。图中 A_2是 A 经过在 l 方向上，距离为 a 的平移变得的点，那么 A_2在直线 l 上的反射象也正是 A'。)

一个图形 F 的所有点经滑动反射所得到的点的集合，构成新图形 F'，我们就称 F' 是图形 F 经过一个滑动反射所得到的图形[图42(b)]。显然，反过来图形 F 可以由图形 F' 经过一个具有同一轴 l 的(平移方向相反的)滑动反射所得到。因此，我们可以说两个图形相差一个滑动反射。

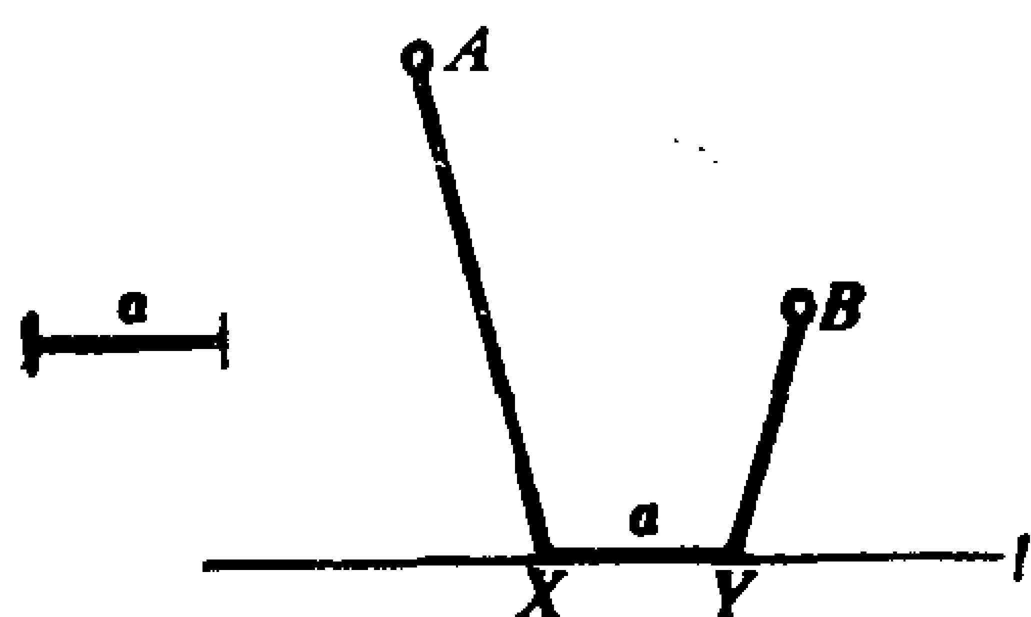


图 43

36. 给定直线 l 和在它同侧的两点 A，B，又给定一线段 a。在 l 上找一线段 XY，使其长度等于 a，且折线 $AXYB$ 的长度最小(图43)。

37. (a) 给定四边形 $ABCD$ 的两边 AB 和 CD，以及另两边之和 $AD+BC$；又给定顶点 A 到 CD 边的距离 d，已知 $\angle C=\angle D$，求作此四边形。

(b) 给定四边形 $ABCD$ 的两边 AB，CD，另两边之和 $AD+BC$；又给定顶点 A 和 B 到 CD 边的距离 d_1和 d_2，求作此四边形。

现在我们来证明关于反射加法的几个命题①。

命题1 在同一直线上的两次反射之和是恒同变换。

事实上，如果在直线 l 上的反射把 A 点变到 A' 点[图34(a)]，则第二次这样的反射又把 A' 变回 A；这就是说，两次相同反射的结果，每一点 A 的位置不变。

命题1也可改述如下：在同一直线上的两次反射互相抵消。

命题2 在两条平行直线上的反射之和是一个平移，其方向垂直于这两条直线，移动距离等于这两直线间距离的两倍。

设 A 是平面上任意一点，并设 A_1 是 A 在直线 l_1 上的反射象，A' 是 A_1 在平行于 l_1 的直线 l_2 上的反射象[图44(a)]。则 $AA_1 \perp l_1, A_1A' \perp l_2$，因此点 A, A_1 和 A' 在同一条垂直于 l_1 和 l_2 的直线 m 上。设 P 和 Q 是 m 与 l_1 和 l_2 的交点。则 $AP = PA_1, A_1Q = QA'$。

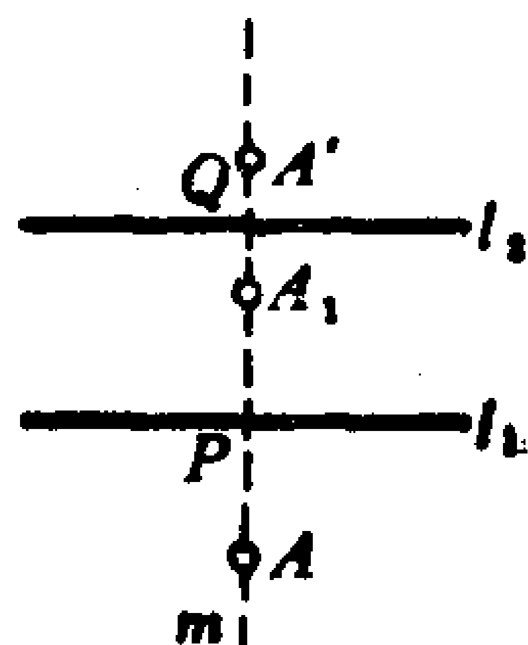


图 44(a)

我们以图44(a)中情形为例，来计算 AA'：

$$AA' = AP + PA_1 + A_1Q + QA' = 2PA_1 + 2A_1Q = 2PQ.$$

这样，$AA' \perp l_1$，并且 $AA' = 2PQ$，这正是所要证明的。

命题1可看作命题2的一种特例，即 $PQ = 0$ 的情形。

命题3 在两条相交直线上的反射之和是一个旋转，其中心是这两条直线的交点，转角等于这两条直线夹角的两倍。

设 A 是平面上任意一点，A_1 是 A 在直线 l_1 上的反射象，

① 以后我们常把"在直线上的反射"简称为"反射"。——英译者

A' 是 A_1在直线 l_2上的反射象[图44(b)]。记 l_1和 l_2 的交点为 O，AA_1与 l_1的交点为P，A_1A' 与 l_2的交点为Q．则

$$\triangle AOP \cong \triangle A_1OP, \qquad \triangle A_1OQ \cong \triangle A'OQ.$$

由此推出

$$OA = OA_1, \qquad OA_1 = OA';$$

$$\angle AOP = \angle POA_1, \qquad \angle A_1OQ = \angle QOA',$$

并且，以图44(b)中的情形为例，

$$\angle AOA' = \angle AOP + \angle POA_1 + \angle A_1OQ + \angle QOA'$$
$$= 2\angle POA_1 + 2\angle A_1OQ = 2\angle POQ.$$

这样，$OA = OA'$，并且$\angle AOA' = 2\angle POQ$，就正是要证的①．

图 44(b)

我们可以利用命题1—3，比较简单地证明关于旋转与旋转或旋转与平移的加法的定理。

例如，我们来求两个旋转之和。设两个旋转的中心分别是O_1和 O_2，转角分别是 α 和 β；又设 l_1是过 O_1的直线，使$\angle l_1O_1O_2 = \alpha/2$，$l_2$ 是过 O_2 的直线，使$\angle O_1O_2l_2 = \beta/2$。则根据命题3，第一个旋转可以分解为在直线$l_1$和 O_1O_2上的两次反射之和，第二个旋转可以分解为在直线O_1O_2和 l_2上的两次反射之和。但是，这四个反射的中间两个有相同的对称轴，根据命题1，它们可互相抵消。这样，四次反射之和就等于在直线 l_1和 l_2上的两次反射之和了。如果

① 从命题2和命题3的证明中不难看出，在两条直线上的反射之和与它们的次序有关，除非这两条直线互相垂直（在这种情形，无论哪个次序，两次反射之和都是关于它们交点的中心对称）。

l_1和l_2的交点是O，那么根据命题3，这两次反射之和是一个以O为中心的旋转，转角为$2\angle l_1OO_2$. 从图45(a)中可看出，这个转角等于

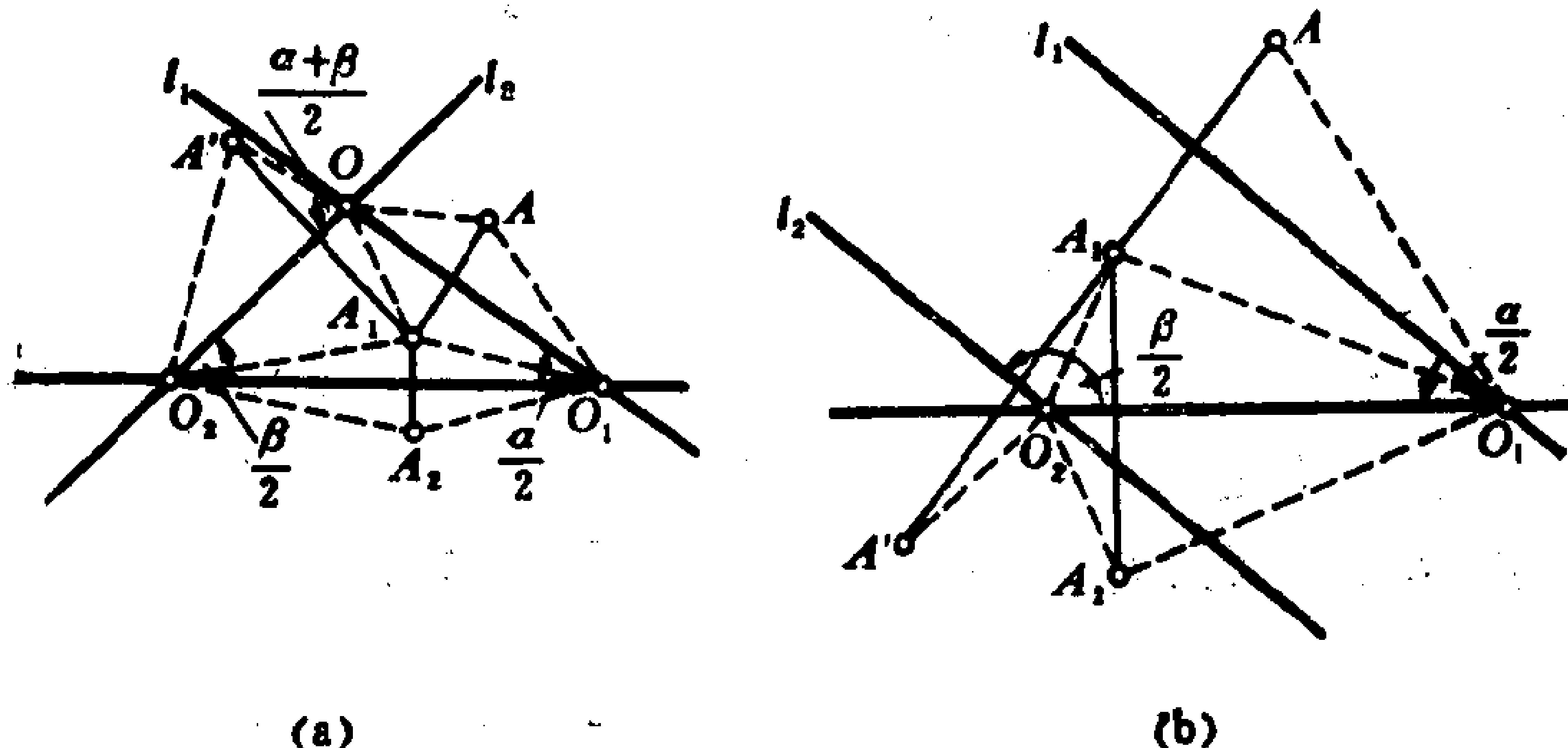


图 45

$$2\angle l_1O_1O_2=\alpha \quad 和 \quad 2\angle O_1O_2l_2=\beta$$

之和($\angle l_1OO_2$是三角形O_1O_2O的一个外角)。

如果l_1和l_2是平行的(显然，当$\angle l_1O_1O_2+\angle O_1O_2l_2=180^\circ$,也就是$\alpha+\beta=360^\circ$时出现这种情形；见图45(b)),那么根据命题2，在l_1和l_2上的两次反射之和是一个平移. 这样，我们再次证得了以前的结果(见28页).

下面我们来求一个平移与一个旋转之和. 设此平移的方向是NN'，距离为a；旋转的中心为O点，旋角为α. 用两个反射之和来代替这个平移，这两个反射的对称轴l_1和l都垂直于NN'，相距$a/2$，并让l经过O点[图46(a)]. 设直线l_2经过O点，且$\angle lOl_2=\alpha/2$. 则那个旋转可用在直线l和l_2上的两次反射之和来代替. 于是，所求平移与旋转之和就可分解为在l_1,l,l,l_2上的四次反射之和. 根据命题1，这四

次反射的中间两次可互相抵消，只剩下在 l_1 与 l_2 上的两次反射之和了。再根据命题3，它是一个以 l_1 与 l_2 的交点 O_1 为中心的旋转，转角为

$$2\angle l_1O_1l_2 = 2\angle lOl_2 = \alpha$$

[见图46(a)]。

用完全相同的方法还可以说明，一个中心为 O、转角为 α 的旋转与一个在 NN' 方向上，距离为 a 的平移之和仍是一个旋转。其转角仍为 α；中心 O_1 可这样求：过 O 作直线 l 和 l_1，使 $l \perp NN'$ 且 $\angle l_1Ol = \alpha/2$，再作直线 $l_2 \parallel l$，且与 l 相距 $a/2$。那么 l_1 和 l_2 的交点就是 O_1[图46(b)]。

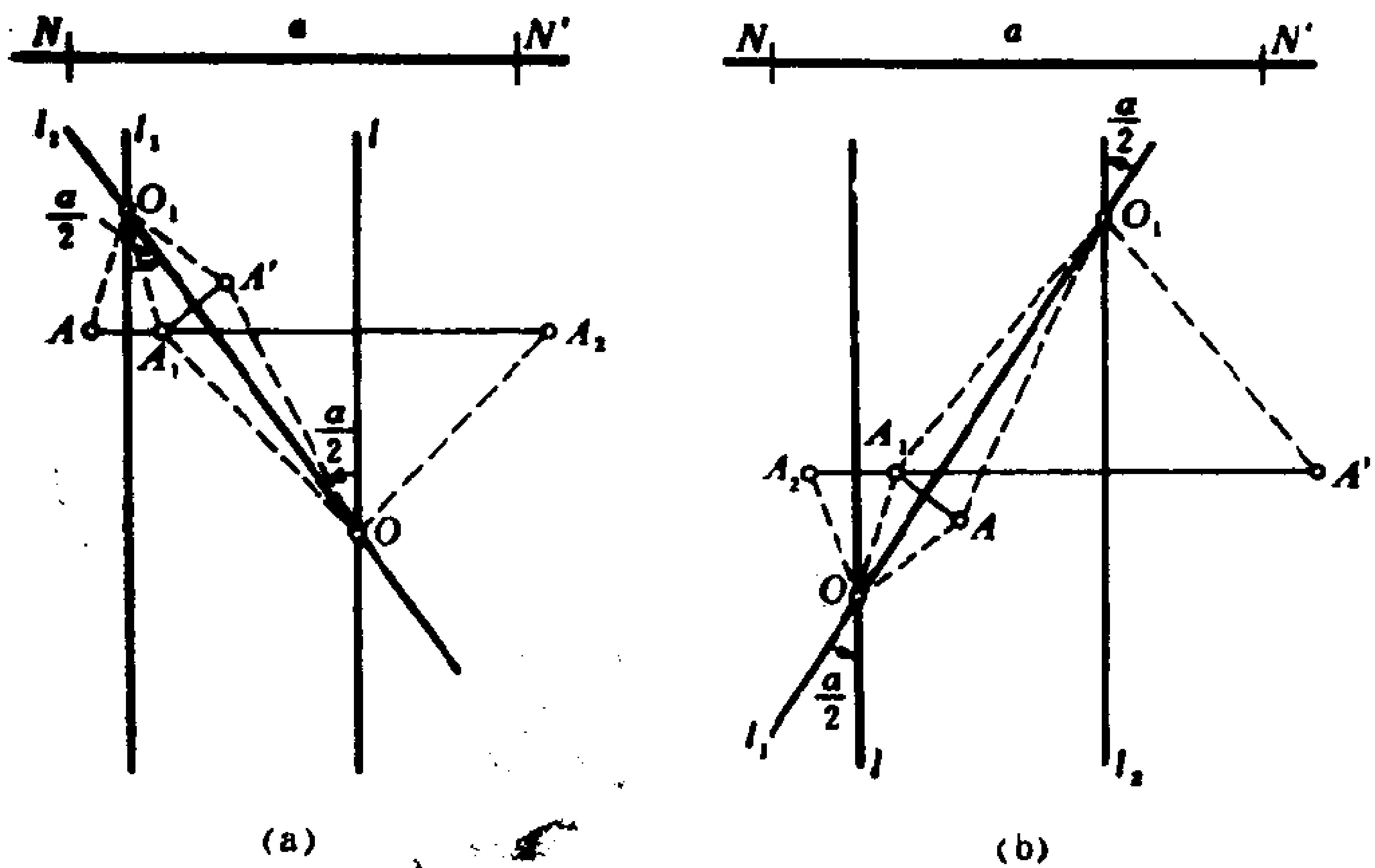


图 46

命题4 在三条平行直线或三条交于一点的直线上的反射之和，为一个在某直线上的反射。

先看三条直线 l_1, l_2 和 l_3 平行的情形[图47(a)]。根据命题2，在 l_1 和 l_2 上的反射之和是一个平移，其方向垂直于 l_1 和 l_2，移动距离等于这两条直线间距离的两倍。这个平移也等

于在任意两条平行于 l_1，并且相距恰为 l_1 与 l_2 间距离的直线 l 与 l' 上的反射之和。选取 l 和 l'，使 l' 与 l_3重合。原来的三个反射之和可用在 l, l', l_3上的反射之和代替。根据命题1，后两个反射互相抵消，所以只剩下在 l 上的反射了。

再看 l_1, l_2和 l_3相交于 O 点的情形[图47(b)]。根据命题3，在 l_1和 l_2上的反射之和是一个旋转，其中心为O，转角为$2\angle l_1Ol_2$。设 l 是过O点的一直线，使$\angle lOl_3=\angle l_1Ol_2$。那么，上述旋转也等于在 l 和 l_3上的反射之和。这样，在 l_1，l_2和 l_3上的三次反射之和等于在 l, l_3和 l_3上的三次反射之和，也就是在 l 上的反射（后两次反射互相抵消）。

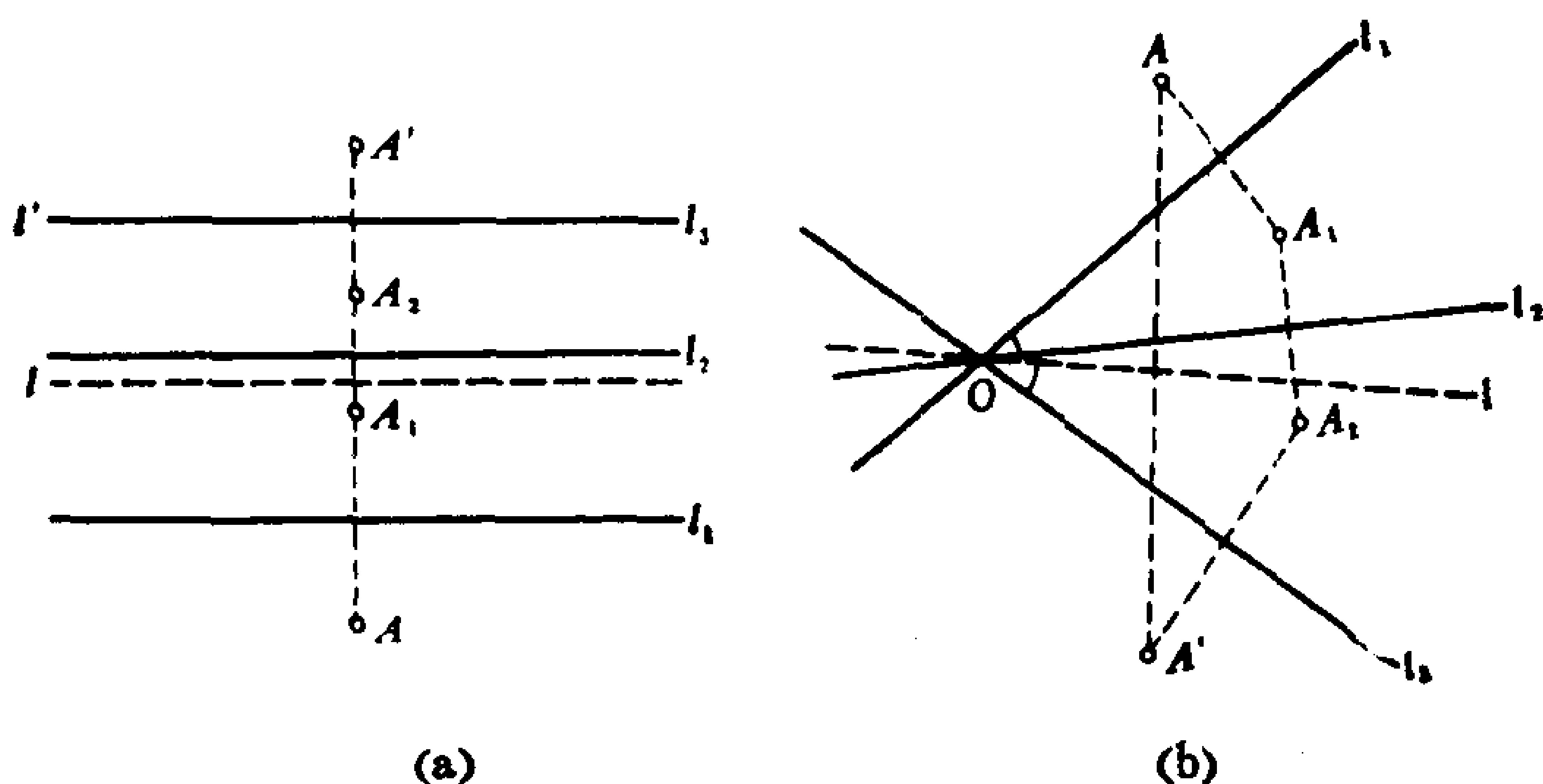


图 47

命题5 如果三条直线两两相交，但交于三个不同点，或者有两条平行，而第三条与它们相交，则在它们上的三次反射之和为一个滑动反射。

设直线 l_1和 l_2相交于O点[图48(a)]。在 l_1和 l_2上的反射之和是以O点为中心的一个旋转，其转角为$2\angle l_1Ol_2$（见命题3）。若 l_1'和 l_2'是任取的两条交于O点，且夹角等于$\angle l_1Ol_2$的直线，则在 l_1', l_2'上的反射之和也是上述旋转。我们选择

l'_1和l'_2，使$l'_2\perp l_3$，并用在l'_1,l'_2,l_3上的三次反射之和来代替在l_1,l_2,l_3上的三次反射之和。(根据命题3，在两条垂直直线上的反射之和等于关于它们交点的中心对称。因此，在l'_1,l'_2,l_3上的反射之和，就是在l'_1上的反射与关于l'_2,l_3交点O_1的中心对称之和——或说在l'_1上的反射与在O_1上的反射之和。)

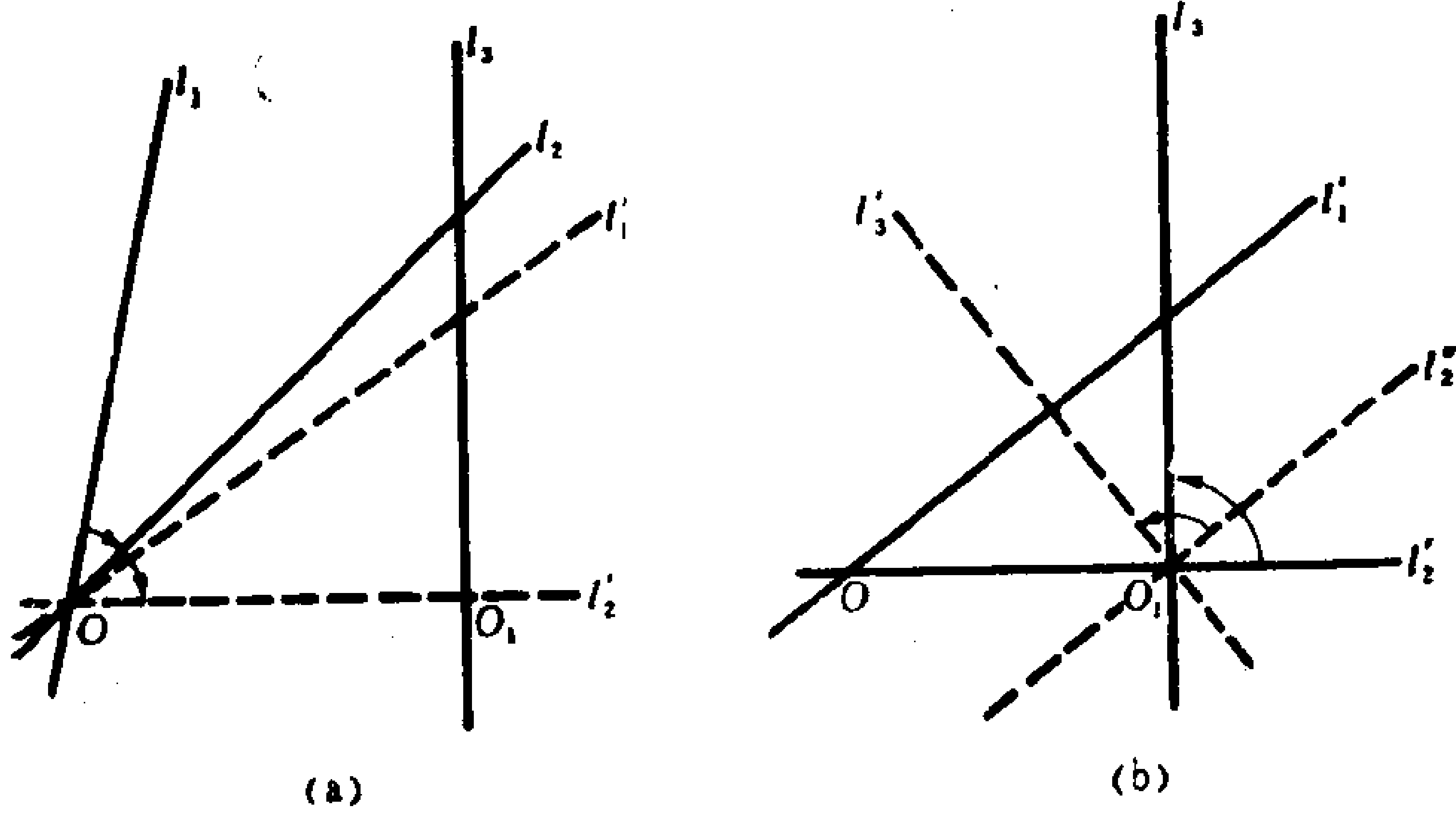


图 48

现在，我们再用在另外两条垂直相交于O_1的直线l''_2，l'_3上的反射之和来代替在l'_2,l_3上的反射之和，并且取l''_2平行于l'_1(图48(b)；这样代替是允许的，因为在l''_2,l'_3上的反射之和也是关于O_1的中心对称)。于是，在l'_1,l'_2,l_3上的反射之和又可用在l'_1,l''_2,l'_3上的反射之和代替。根据命题2，在平行直线l'_1,l''_2上的反射之和等于一个平移，其方向垂直l'_1和l''_2，也即平行于l'_3。这样，在l'_1,l''_2,l'_3上的反射之和等于在l'_3方向上的一个平移与在l'_3上的反射之和，因此是以l'_3为轴的一个滑动反射。

在l_1和l_2平行，而l_3与它们相交的情形，证明过程完全相仿。(设l_2与l_3交于O点。首先用在另一对相交于O的直

线l_2'和l_3'上的反射之和来代替在l_2和l_3上的反射之和，并选取$l_2' \perp l_1$；然后再把在l_1和l_2'上的反射之和换成在另一对垂直的直线l_1'和l_2''上的反射之和，这里l_1'与l_2''的交点和l_1与l_2'的交点重合，并选择l_2''与l_3'平行。）

综合命题2—5的结果，我们得到

定理 偶数个反射之和是一个旋转或一个平移，奇数个反射之和是反射或滑动反射。

事实上，根据命题 2 和 3，偶数个反射之和可用一些旋转与平移之和来代替，而任何有限个旋转与平移之和仍是旋转或平移(参看第一章，27—30页)。

既然偶数个反射之和是旋转或平移，那么奇数个反射之和等于一个旋转或平移加上一个反射。根据命题 2 和 3，旋转或平移都可分解为两个反射。这样一来，奇数个反射之和总可用三次反射之和来代替。再应用命题 4 和 5，就推出定理的结论。

我们还要注意，偶数次反射之和一般来说是一个旋转，平移的情形应认为是一种特殊情形。(在直线l_1和l_2上的两次反射之和为平移的情形仅在$l_1 /\!/ l_2$这种特殊条件下才发生；而转角为α和β的两个旋转之和也仅在$\alpha+\beta=360^\circ$时才是平移。)类似地，奇数次反射之和一般来说是滑动反射，只有在特殊情况下才是反射。(例如，在三条直线l_1, l_2, l_3上的反射之和仅仅在l_1, l_2, l_3互相平行或相交于一点的条件下才是反射。)

反射和滑动反射也都是整个平面的变换[1](平面的每一

---

① 按照前言中的定义，反射还是保距变换，因为它把每一条线段AB变为一条与它等长的线段$A'B'$(见图36和相应的文字部分)。滑动反射是反射和平移这样两个保距变换之和，因此也是保距变换。

点都被变到一个新点)．在直线 l 上的反射的不动点是对称轴 l 上的所有点；不动直线是 l，以及与 l 垂直的直线．滑动反射没有不动点；不动直线也只有轴 l 一条．

38．光线在平直镜面上的反射遵循如下法则：入射角等于反射角(也就是和台球在球桌边上碰弹时的反射法则一样，见30题)．现设在平面上放置两个直线镜，它们夹角为 α．试证：如果 $\alpha=90°/n$，这里 n 是整数(并且仅当 n 为整数时！)，则任何光线射到这两个镜面上反射数次后，将沿入射方向的反向射出去．(图49(a)，(b)分别说明 $n=1, \alpha=90°$ 和 $n=2, \alpha=45°$ 的情况．在这两种情况下，光线最后射出的方向——即图中的 PQ 和 RS——与入射方向 MN 相反．)

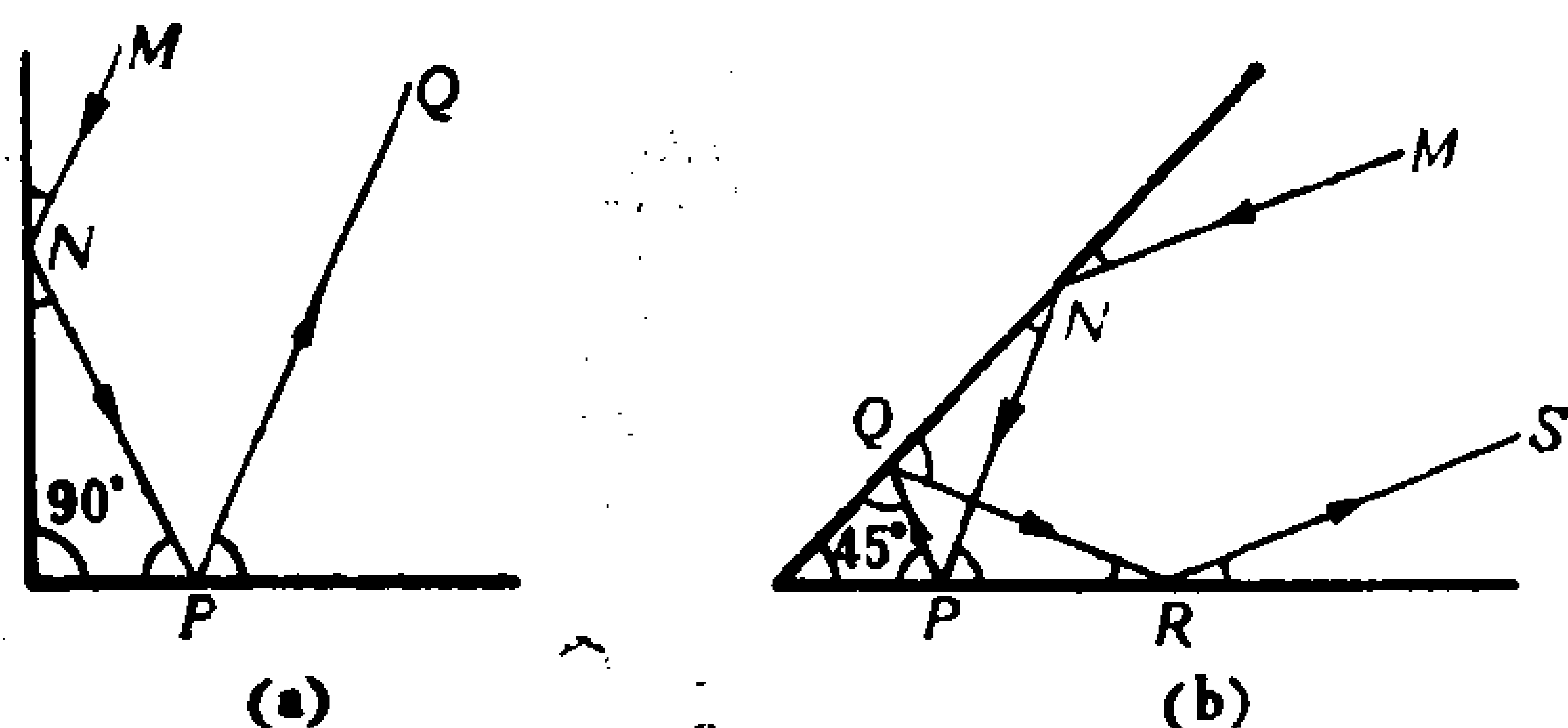


图 49

39．在平面上给定 n 条直线 $l_1, l_2, \cdots, l_n$．试作一个 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，使得直线 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 分别是：

(a) 这个多边形各边的中垂线[图50(a)]．

(b) 这个多边形各顶点处的外角或内角的分角线[图50(b)]．

分别考虑 n 是奇数和偶数的情况．在哪一种情况下本题无解，或解不能唯一确定？

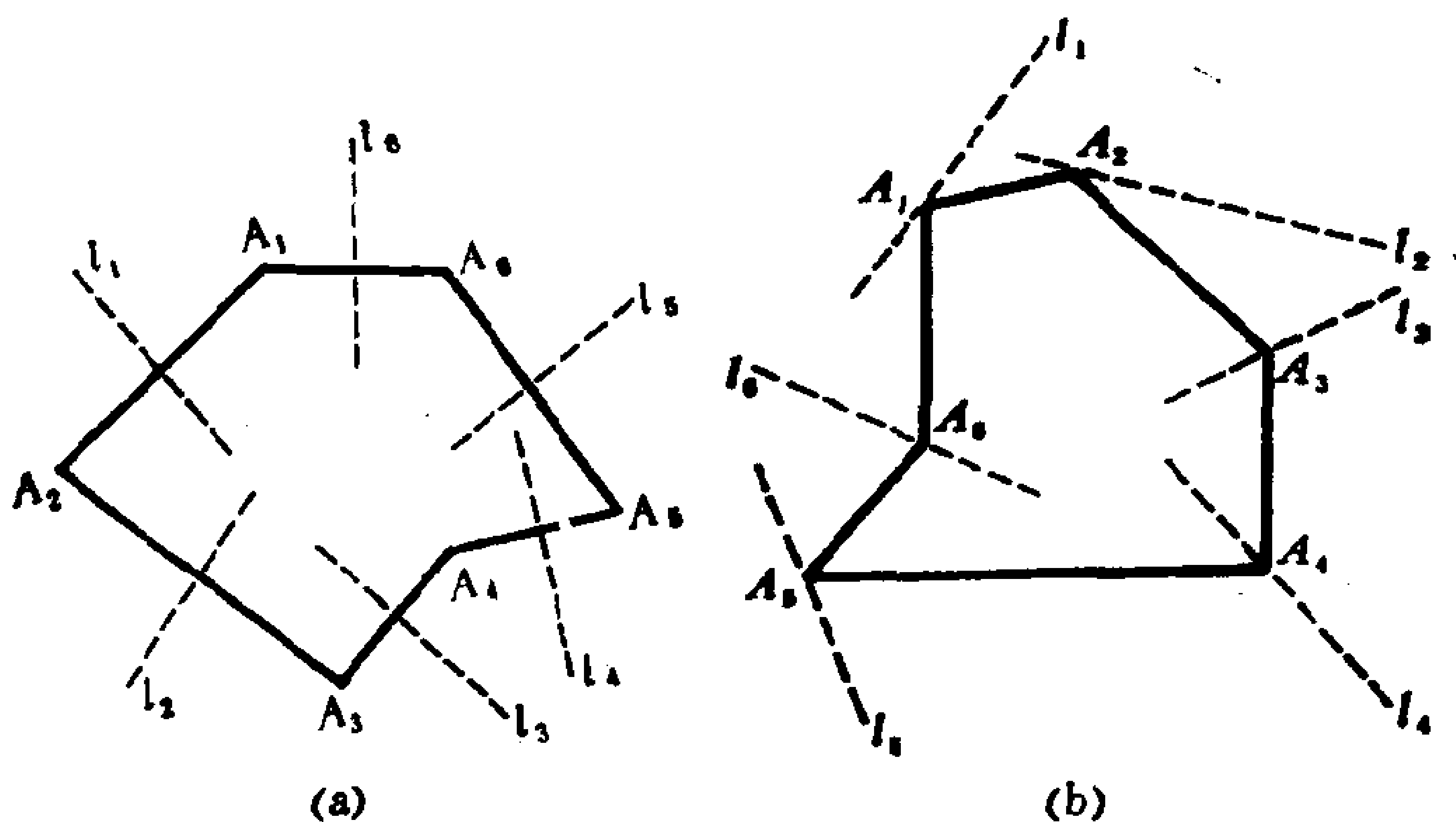


图 50

40. 给定平面上一点M和$n-1$条直线$l_2, l_3, \cdots, l_n$。求作一个n边形$A_1A_2\cdots A_n$：

(a) 使得A_1A_2边的中点是M，而余下各边的中垂线分别是$l_2, l_3, \cdots, l_n$。

(b) 使得角A_1等于给定值α，它的分角线经过M，并且角$A_2, A_3, \cdots, A_n$的分角线分别为$l_2, l_3, \cdots, l_n$。

41. 在给定圆上作一内接n边形：

(a) 使得它的各边分别平行于n条给定直线。

(b) 使得A_1A_n边过给定点，余下各边分别平行于$n-1$条给定直线。

42.(a) 在平面上给定三条交于一点的直线l_1, l_2和l_3；又设A是平面上任一点。将A相继在l_1, l_2, l_3上作反射，得点A_3；然后将A_3按同一次序作这三次反射，得点A_6。试证A_6与A重合[图51(a)]。

如果题中三条直线l_1, l_2和l_3换成n条交于一公共点的直线，结论还正确吗？(原来要作6次反射，现在要作$2n$次了)。

(b) 在平面上给定三条交于一点的直线 l_1, l_2, l_3。将平面上任意点 A 相继在 l_1, l_2, l_3 上作三次反射；然后再将 A 相继在 l_3, l_2, l_1 上作三次反射。试证：在两种情况下最后所得的象点是同一点 A_3。

(c) 在平面上给定四条交于一点的直线 l_1, l_2, l_3, l_4。将平面上任一点 A 相继在 l_1, l_2, l_3, l_4 上作四次反射；然后又将 A 按另一次序作四次反射：l_3, l_4, l_1, l_2。说明两种做法最后得到的象点是同一个 A_4[图51(b)]。

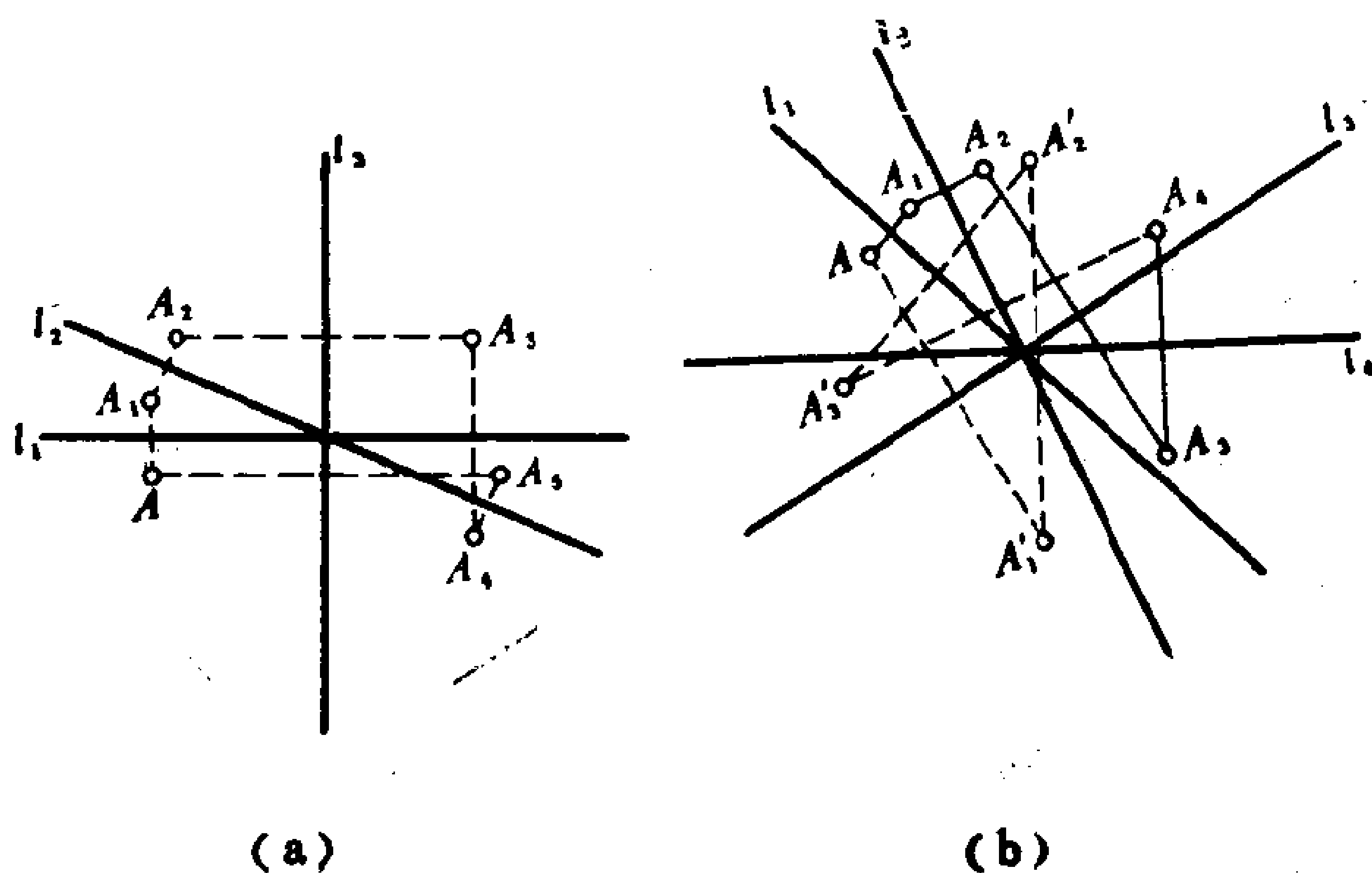


图 51

43.(a) 设点 M, N, P 分别在三角形 ABC 的边 AB, BC, CA 上；又设 CM', AN', BP' 是直线 CM, AN, BP 分别在角 C, A, B 的分角线上的反射象。试证：如果 CM, AN, BP 交于一点或互相平行，则 CM', AN', BP' 也交于一点或互相平行[图52(a)]。

(b) 设点 M, N, P 分别在三角形 ABC 的边 AB, BC, CA 上，M_1, N_1, P_1 是 M, N, P 分别关于相应边中点的中心

对称象(即M_1是M点作关于AB中点的中心对称而得到的点，N_1,P_1也类似)。试证：如果AB,BC,CA分别在M,N,P处的垂线交于一点，则AB,BC,CA分别在M_1,N_1,P_1处的垂线也交于一点[图52(b)]。

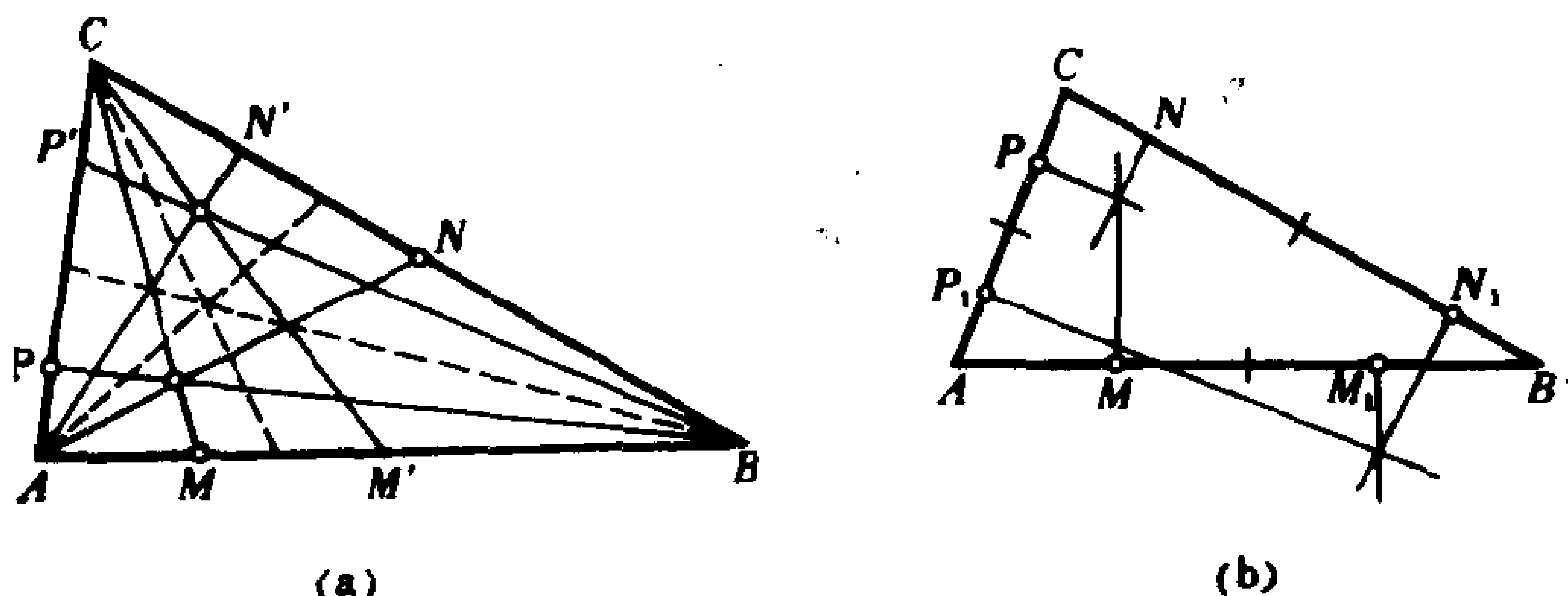


图 52

44. 任意给定平面上三条直线l_1,l_2,l_3。设A是平面上任意一点。用两种方法将A在这三条直线上连续作一系列反射：其一，先以l_1,l_2,l_3,l_1,l_2,l_3的次序作六次，将所得点A_6再以l_2,l_3,l_1,l_2,l_3,l_1的次序作六次；其二，将A先以l_2,l_3,l_1,l_2,l_3,l_1的次序作六次，再将所得点A'_6以l_1,l_2,l_3,l_1,l_2,l_3的次序作六次。试证：用这两种方法，A点经十二次反射最后得到的是同一个点A_{12}。

2. 正全等图形和反全等图形·平面保距变换的分类

在基谢廖夫的中学几何课本中规定："如果两个几何图形中的一个可以经过在空间中的运动而和另一个重合，就称它们是全等的。"这个定义是在基谢廖夫的《几何》第一册的开头给出的，是全书的一个基础。然而，在平面几何课程的开始就出现这样的定义，是会使人感到疑惑的。平面几何是研究平面上的图形的性质的，而在图形全等的这个定义

中所说的图形的运动，却是在空间中的。看起来，平面几何课程的最初的，也是最基本的一个定义却不属于平面几何，而是立体几何的。似乎在平面几何课程中，采用下面的说法更恰当一些：两个图形如果可以经过平面上的（而不是空间中的）运动而重合，就称为全等的。这个定义中沒有用到立体几何的概念。可是，全等的这个新定义与原来的定义是不等价的。

事实上，平面上一对图形全等可以有两种情况。一种情况是：我们可以一直不离开平面地移动一个图形，使它与另一个重合。例如图53(a)中的F和F_1就是这种情况(可以用关于O点的旋转来使它们重合)。但是也有另一种情况：要使两个全等图形重合，必须将其中一个离开原来所在平面，并翻一个面。图53(b)中的F'和F_1'就是如此。不可能在平面上移动F_1'，使它与F'重合。

下面我们对此加以说明。考虑F_1'上的三点A_1',B_1',C_1',

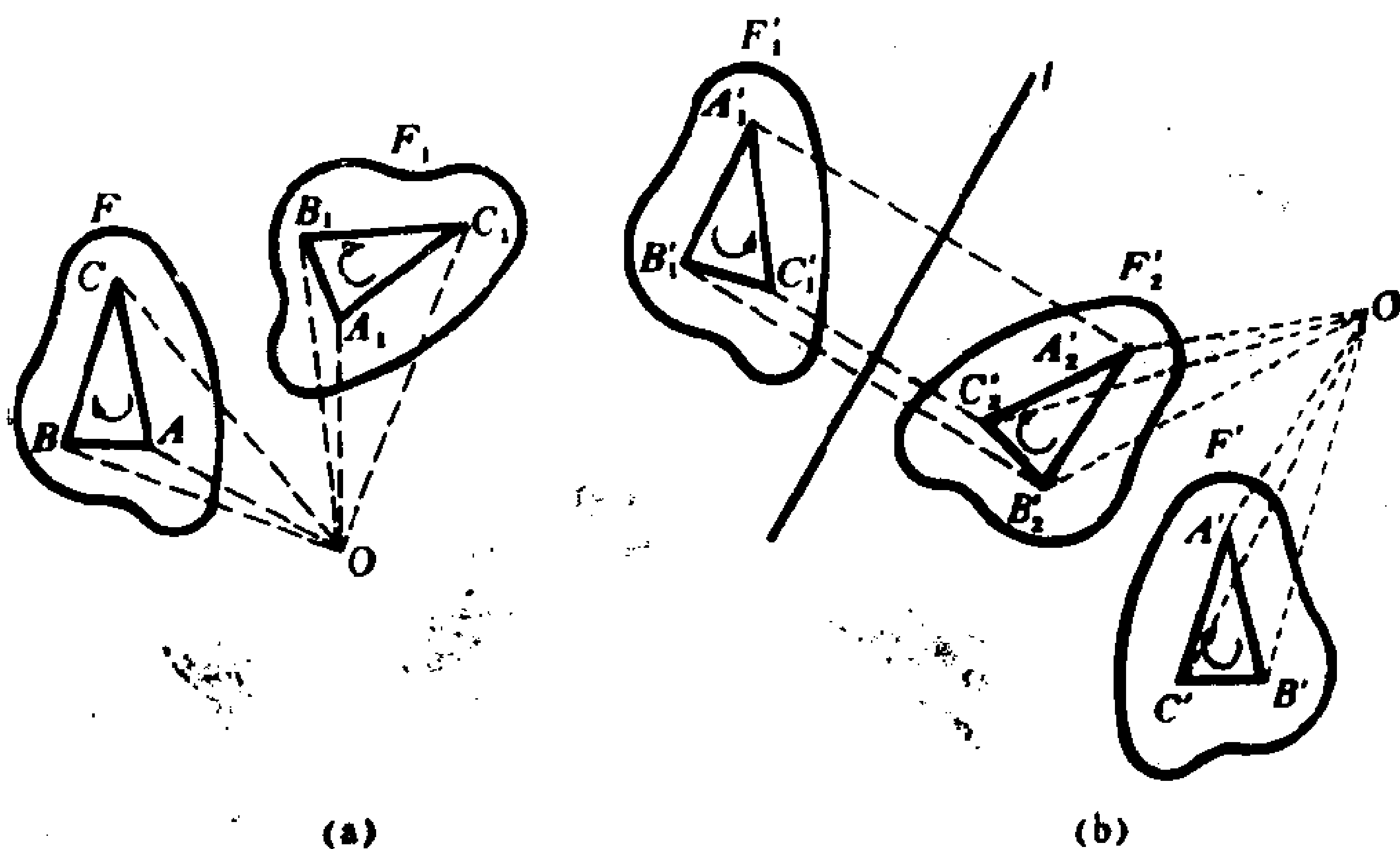


图 53

及 F' 上的对应点 A',B',C'. 三角形 $A'B'C'$ 和 $A_1'B_1'C_1'$ 有所谓"不同的定向"。在三角形 $A'B'C'$ 中，由 $A'\to B'\to C'$ 决定的边界的围绕方向与时钟针走的方向一致(即顺时针方向)，然而在三角形 $A_1'B_1'C_1'$ 中，由 $A_1'\to B_1'\to C_1'$ 决定的边界的围绕方向是与时钟针走的方向相反的(即反时针方向)。显然，图形 F_1' 在平面上作任何运动都不能改变三角形 $A_1'B_1'C_1'$ 的定向。因此，任何在平面上的运动都不能使三角形 $A_1'B_1'C_1'$ 与三角形 $A'B'C'$ 重合。但是，如果我们把图形 F_1' 翻转到它的另一面——为此，只要用 F_1' 在某直线 l 上的反射象 F_2' 来代替 F_1'——这时再用平面上的运动，就不难让 F_2' 与 F' 重合了(见图53(b)，只用作绕 O 点的一个旋转)。

以后，两个图形如果可以只用平面上的运动使它们重合，就称为**正全等的**；如果两个图形全等，但不能用平面上的运动使它们重合，就称它们是**反全等的**。从上面的讨论中我们已经知道怎样判断给定的两个全等图形 F 和 F' 是正全等的还是反全等的：在 F 上任选不共线的三点 A,B,C，记 A',B',C' 是它们在 F' 上的对应点，然后检验三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的定向(分别由 $A\to B\to C$ 和 $A'\to B'\to C'$ 决定)相同还是相反。只有在不必要区别正全等和反全等的情况下，我们才用"全等"这个词而不在前面加上"正"或"反"。

于是，如果两个几何图形中的一个可以经过在平面上的运动而与第二个重合，就说这两个图形是正全等的。这个定义几乎逐字逐句地和基谢廖夫的定义一样，但是它完全是平面几何的。

下面我们证明两个重要定理。

定理1 平面上任何两个正全等的图形都可以经过一个

旋转或平移而重合。

首先我们注意到，任给平面上两条等长的线段 AB 和 $A'B'$，总可以用一个旋转或一个平移使它们重合。事实上，如果 AB 和 $A'B'$ 平行，并且方向相同[图54(a)]，则可用一个平移把 AB 变到 $A'B'$(见13页，那里证明了一个更一般的命题：如果两个图形 F 和 F' 的对应线段相等、平行且方向相同，则它们相差一个平移)；这个平移的方向和距离可由线段 AA' 决定。如果线段 AB 和 $A'B'$ 夹一角 α[图54(b)]①，则 AB 可被一个转角为 α 的旋转变到 $A'B'$(见26页，那里证明了一个更一般的命题：如果两个图形 F 和 F' 的对应线段相等，且夹定角 α，则它们相差一个旋转)；这个旋转的中心 O 是线段 AA' 和 BB' 的中垂线的交点②。

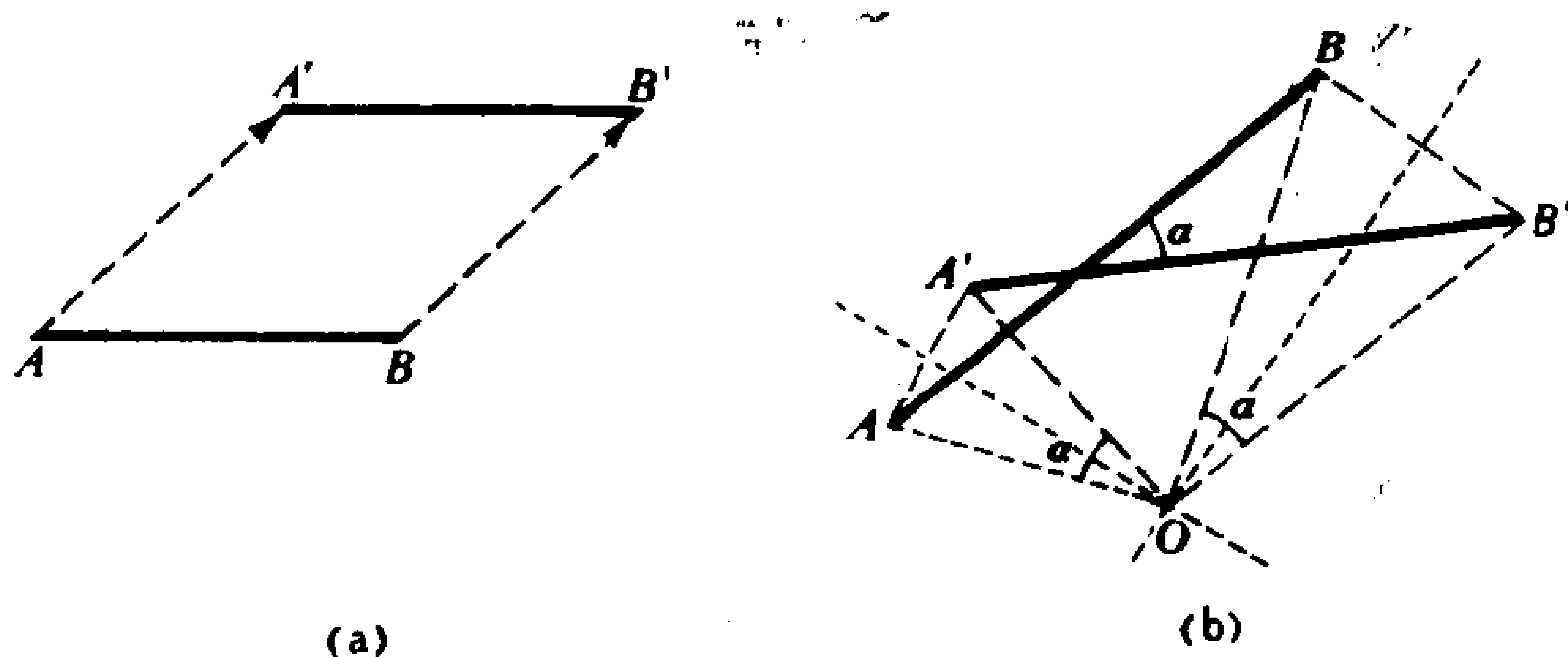


图 54

① 包括 AB 和 $A'B'$ 夹角 $\alpha=180°$ 的情形，即它们相等、平行，但是方向相反。

② 如果这两条中垂线重合，这种求 O 点的方法就不能用了。这时，O 就是直线 AB 与 $A'B'$ 的交点。(如果 AB 与 $A'B'$ 重合，也就是说 A 与 B' 重合，B 与 A' 重合，则 O 点就是它们的公共中点。)也可以这样求 O 点：作立在 AA' 上的弧，使其所含角为 α，则 AA' 中垂线与此弧的交点即 O。在第二册第一章的第二节中，还将给出作 O 点的两个更简便的方法。

现在我们考察两个正全等图形F和F'(图55)。设M和N是F上的两点，M'和N'是它们在F'上的对应点。因为F和F'全等，所以$MN=M'N'$，因而有一个旋转(或平移)把线段MN变为$M'N'$。

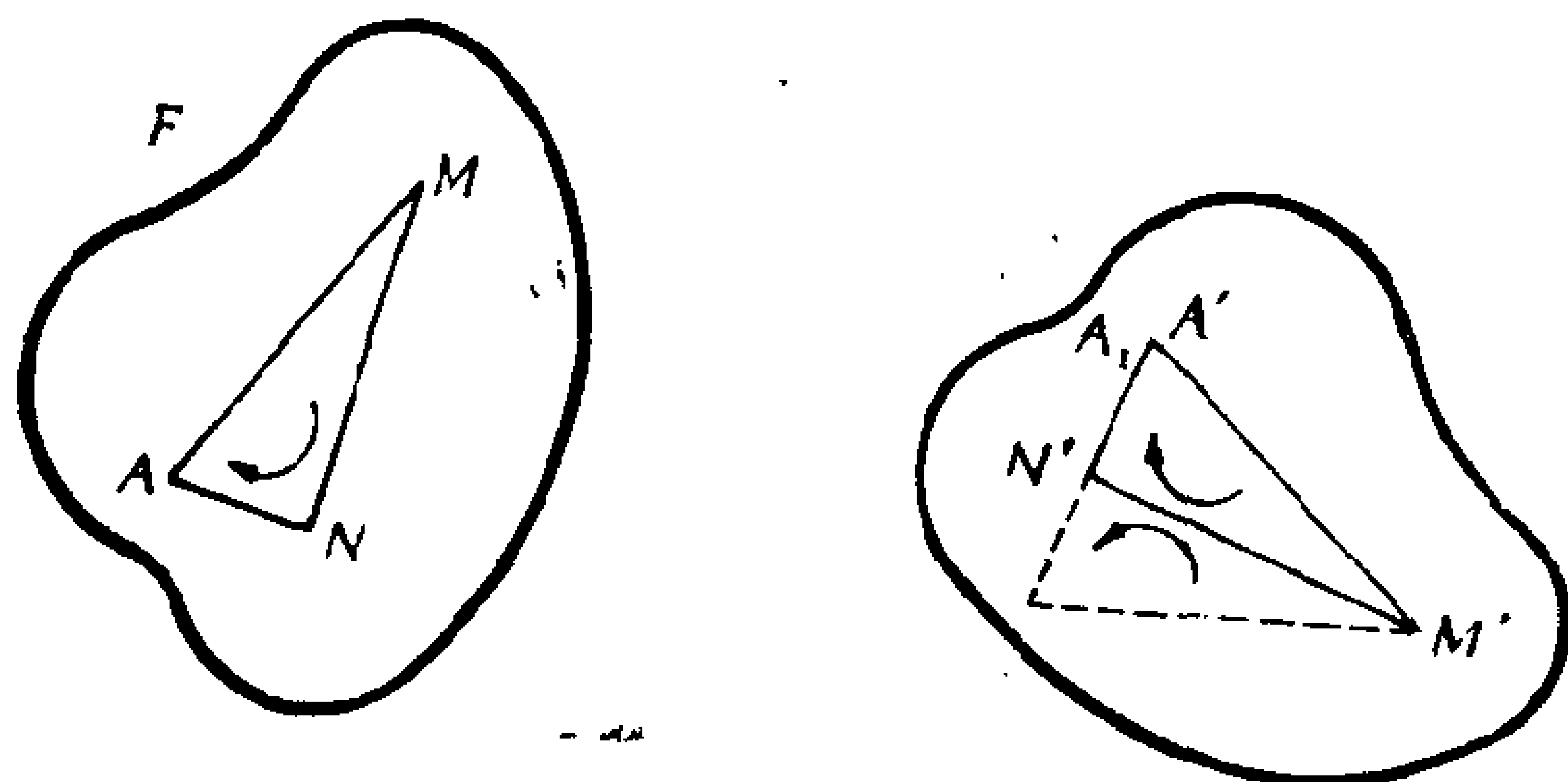


图 55

我们说，这时实际上整个图形F被变到了F'，也就是说F上的每一点被变到它在F'上的对应点A'。事实上，如果将MN变到$M'N'$的旋转(或平移)把A点变到A_1点，我们只用说明A_1与A'重合。由于图形F与F'全等，有$AM=A'M'$，$AN=A'N'$；另一方面，又显然$AM=A_1M'$，$AN=A_1N'$。由此推出三角形$A'M'N'$和$A_1M'N'$全等。但是，这两个三角形有公共边$M'N'$，因此它们或者重合，或者互为在直线$M'N'$上的反射象。在后一种情形，这两个三角形的定向相反。但是，由于F与F'是正全等的，三角形$A'M'N'$的定向与三角形AMN的定向相同；另一方面，三角形AMN与三角形$A_1M'N'$只差一个旋转或平移，从而定向也是相同的。于是，三角形$A'M'N'$与$A_1M'N'$定向相同。这样，我们就推出它们一定是重合的，也就是说A_1点与A'点重合。定理证毕。

如果两个图形F和F'可以经过以O点为中心的旋转互

变，则称 O 点是这两个图形的**旋转中心**。要作两个正全等图形的旋转中心，只须在一个图形上任取两点 A 和 B，找到它们在第二个图形上的对应点 A' 和 B'；则 O 点就是线段 AA' 和 BB' 的两条中垂线的交点(见56页的注②)。

定理 2 平面上任何两个反全等的图形都可以经过一个滑动反射或反射而重合。

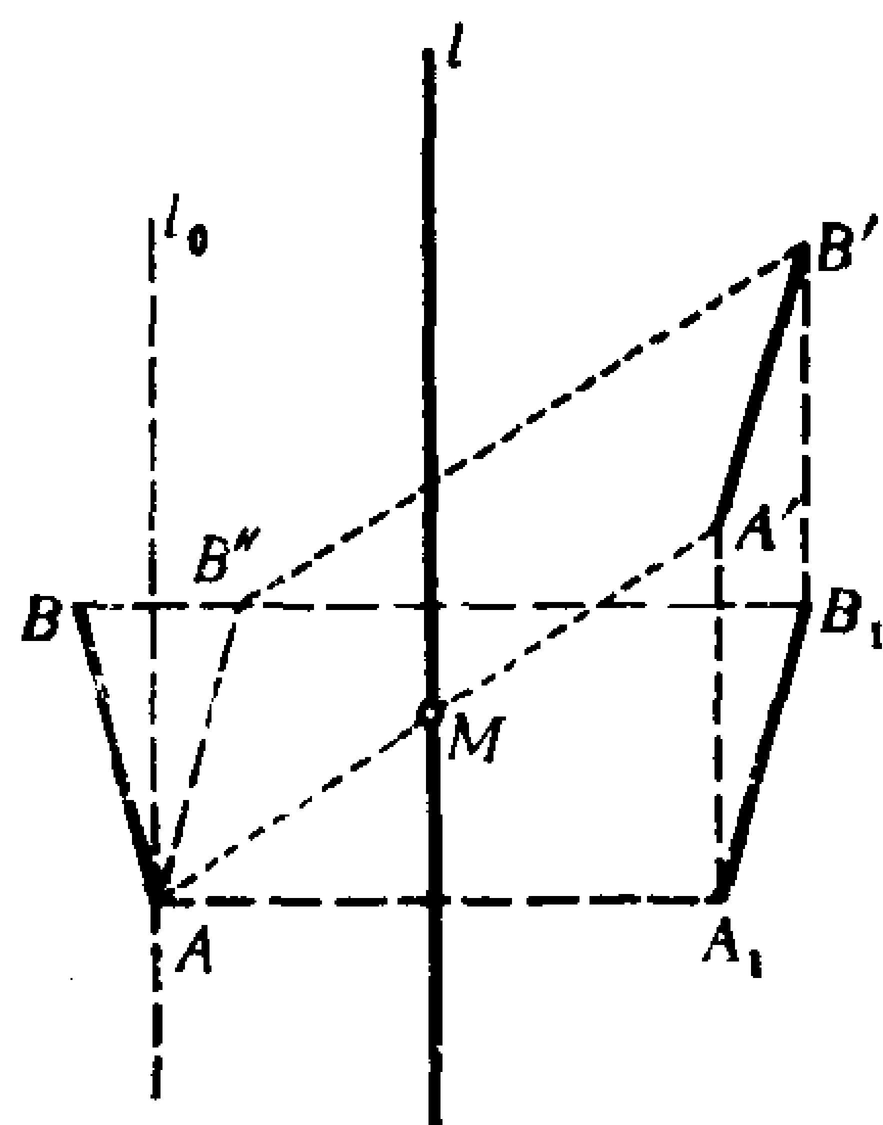


图 56

定理 2 的证明类似于定理 1 的证明。首先我们说明，任何两个等长的线段 AB 和 $A'B'$ 可以经过在某轴上的滑动反射（或反射）互相变化。假定这是对的，并设 l 为该滑动反射（或反射）的轴。把线段 $A'B'$ 平移到新位置 $A''B''$ 处，使 $A''=A$(见图56)。设 A_1B_1 是线段 AB 在 l 上的反射象，那么 $A_1B_1 /\!/ A''B''$(因为它们都平行于 $A'B'$)。由此可得，l 平行于角 $B''AB$ 的分角线 l_0(因为 $A''B''$ 相继在 l_0 和 l 上作反射后变成平行线段 A_1B_1)。另一方面，点 A 和 A' 在 l 两侧，且到 l 的距离相等(因为 A 和 A_1 在 l 两侧，到 l 的距离相等；而 A_1 和 A' 在 l 的同侧，到 l 的距离相等)。因此 l 经过 AA' 的中点 M。这样，l 就能从线段 AB 和 $A'B'$ 来作出了(过 M 点，平行于 l_0)。

现在，设线段 A_1B_1 是 AB 在 l (刚才作的轴)上的反射象。由于 $l /\!/ l_0$，我们有 $A_1B_1 /\!/ A'B'$。又因为 A_1 和 A' 在 l 的同侧，到 l 的距离相等，所以若 A_1B_1 与 $A'B'$ 不重合，那么它一定可被一个在 l 方向上的平移变到 $A'B'$。这样就证明

了，线段 AB 确实可经过一个滑动反射（或反射）变为线段 $A'B'$。

证明的剩下部分几乎是定理 1 的证明的后半部分的重复。设 F 和 F' 是两个反全等图形，M,N 和 M',N' 是 F 和 F' 上的两对对应点(图57)。则存在一个滑动反射(或反射)把线段 MN 变为 $M'N'$。下面我们来说明，这个滑动反射(或反射)实际上把整个图形 F 变成图形 F'。也就是说，F 上的任一点 A 被它变到的 A_1 点，与 A 在 F' 上的对应点 A' 重合(F 和 F' 是反全等的，因此 F 的每一点 A 在 F' 上有对应点 A')。事实上，由于 F 和 F' 全等，故 $\triangle A'M'N' \cong \triangle AMN$；又由于 $\triangle A_1M'N'$ 是 $\triangle AMN$ 经过一滑动反射(或反射)变来的，$\triangle A_1M'N' \cong \triangle AMN$。因此，$\triangle A_1M'N'$ 或者与 $\triangle A'M'N'$ 重合，或者是 $\triangle A'M'N'$ 在它们公共的边 $M'N'$ 上的反射象.由三角形 $A'M'N'$ 的定向与三角形 AMN 的定向相反(因为图形反全等)，而三角形 $A_1M'N'$ 的定向也与三角形 AMN 的定向相反(因为反射或滑动反射改变三角形的定向)，三角形 $A'M'N'$ 与 $A_1M'N'$ 就有相同的定向；因此它们不可能互为反射象。于是三角形 $A'M'N'$ 和三角形 $A_1M'N'$ 重合。定理 2 证毕。

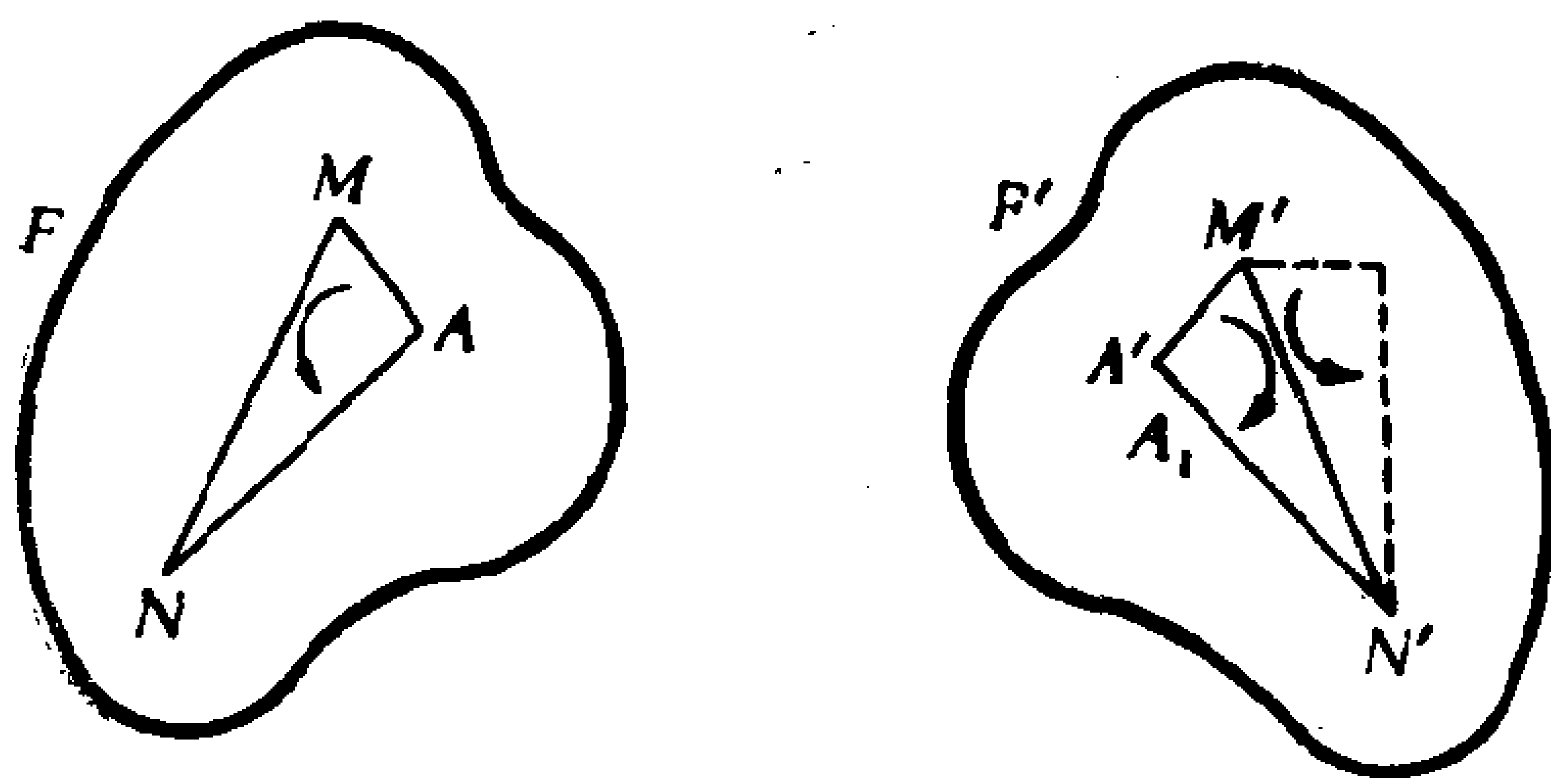


图 57

平面的一个保距变换如果把两个正全等图形中的一个变成另一个，我们就称之为**正保距变换**(或位移)；与此相应地，我们称把两个反全等图形中的一个变为另一个的保距变换为**反保距变换**。于是定理1和定理2正是说明：正保距变换或是一个旋转，或是一个平移；反保距变换或是一个反射，或是一个滑动反射(与49页的内容相对照)。

综合定理1和定理2的结果，我们可以阐述一个更一般的结论：

任给平面上两个全等图形，我们总可以用一个平移，或旋转，或反射，或滑动反射，使它们重合。

一般来说，两个图形如果正全等，则它们相差一个旋转，相差一个平移被看作特殊情况；如果两个图形反全等，则一般它们相差一个滑动反射，相差一个反射是特殊情况。

平移和旋转都可以表示为在两条直线(平行的或相交的)上的反射之和；同时，在一条直线上的反射或滑动反射可以表示为在某条直线上的反射与关于某点的中心对称之和（例如，在直线m上的反射等于下面三条直线上的反射之和：l, $\bar{l}$, m，其中$\bar{l}$是任一条垂直于m的直线；因此它也就等于在l上的反射与关于l与m的交点O的中心对称之和；至于滑动反射，请看47—48页)。于是我们的结论也可阐述为：

任给平面上两个全等图形，我们总可以用在两条直线l_1, l_2上的反射之和，或在一条直线l和一点O上的反射之和来使它们重合。当$l_1 /\!/ l_2$时，我们用的是平移，当O点在l上时，所用的是在一条直线上的反射。

定理1和2也可以从关于反射加法的那几个命题（见43—49页)推出。事实上，定理1的证明基于这样的事实，任何两条相等线段AB和$A'B'$都可以用一个旋转或一个平移

来实现重合。然而很明显，AB 可以经过相继在两条直线 l_2 和 l_1 上作反射变成 $A'B'$：只须取 l_1 是线段 AA' 的中垂线（如果 A' 与 A 重合，那么 l_1 可取过 A 点的任一直线）；记 B_1 是 B' 在 l_1 上的反射象[图58(a)]，再取 l_2 是角 B_1AB 的分角线。剩下只须用43页上的命题 2 和 3 了。定理 2 的证明基于另一事实：两条相等线段 AB 和 $A'B'$ 可以用一个滑动反射或反射来互相变化。但是 AB 可以经过在三条直线 l_1, l_2 和 l_3 上的反射而变到 $A'B'$：l_1 可完全任意取；记 A_1B_1 是 AB 在 l_1 上的反射象，再取 l_2 和 l_3，使得在它们上作的两次反射之和把 A_1B_1 变为 $A'B'$ [图58(b)]。剩下只须再用46—48页上的命题 4 和 5 了。

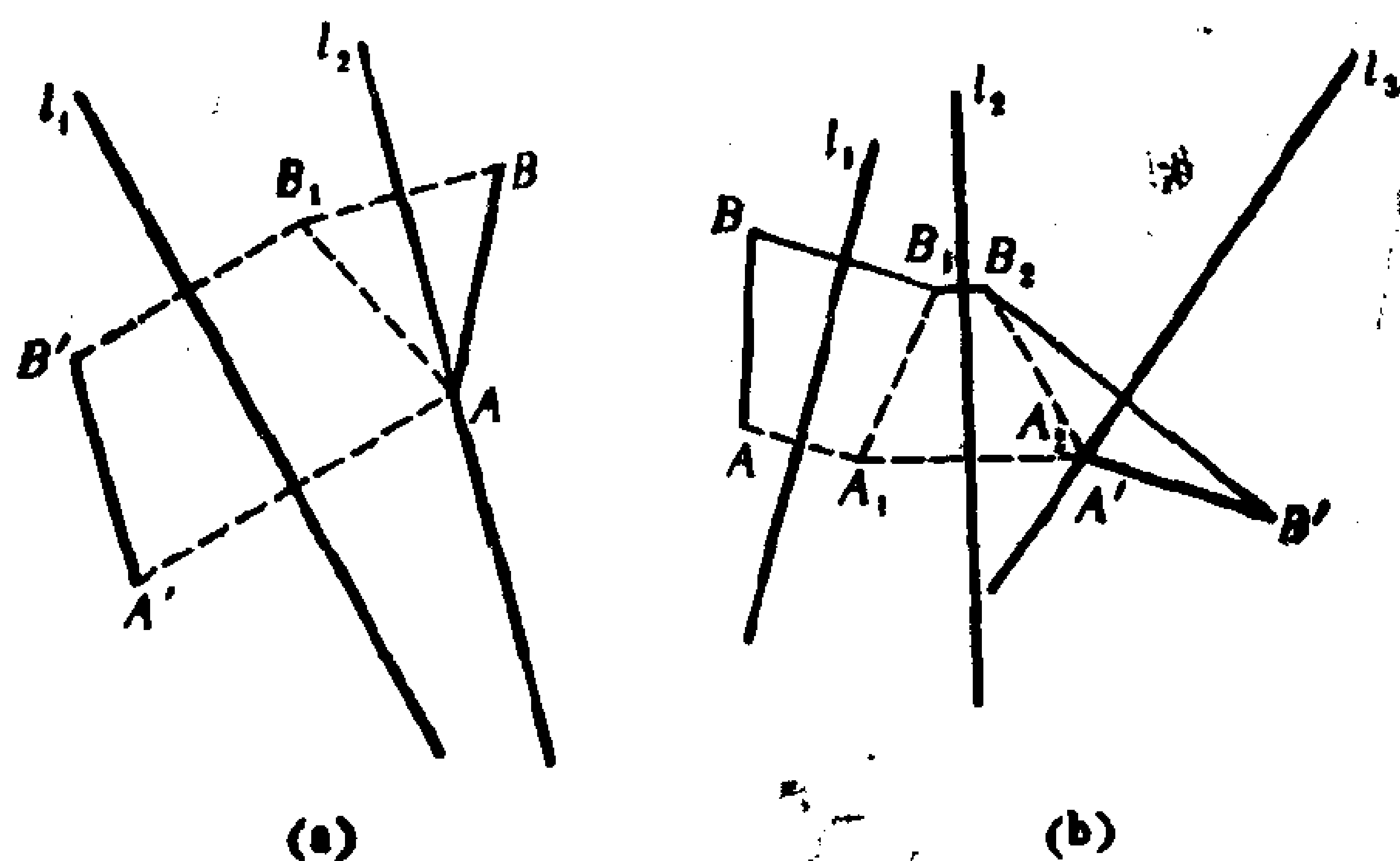


图 58

反过来，关于保距变换的加法的所有命题都能从定理 1 和 2 推出。定理 1 是说，每一对正全等图形可以用一个旋转或平移来互相变得。如果两个图形 F 和 F' 相差两个反射，或更一般地说相差偶数个反射，那么它们是正全等的（因为一次反射改变三角形的定向，两次反射就保持定向了）。因

此，F' 可以由 F 经过一个旋转或平移而变得。这就说明，两个(更一般地，偶数个)反射之和是一个旋转或一个平移（见49页）。用完全类似的方法，可以从定理2推出：三个(更一般地，奇数个)反射之和是一个滑动反射或反射(见49页)。从定理1也可推出：两个旋转之和是一个旋转或平移(见28页或44—45页)，以及两个滑动反射之和是一个旋转或平移等等。

45．给定两条直线 l_1 和 l_2，以及 l_1 上一点 A 和 l_2 上一点 B。试作直线 m，使得它与 l_1 和 l_2 的交点 X 和 Y 满足 $AX = BY$，并且

(a) 直线 m 平行于给定直线 n；

(b) 直线 m 经过给定点 M；

(c) 线段 XY 有定长 a；

(d) 线段 XY 被一给定直线 r 平分。

46．给定三条直线 l_1,l_2,l_3，以及分别在 l_1,l_2,l_3 上的三点 A,B,C。试作直线 m，使得它与 l_1,l_2,l_3 的三交点 X,Y,Z 满足 $AX = BY = CZ$。

47．给定三角形 ABC。求作直线 l，使得它与 AB 边，AC 边的交点 P,Q 满足 $BP = PQ = QC$(图59)。

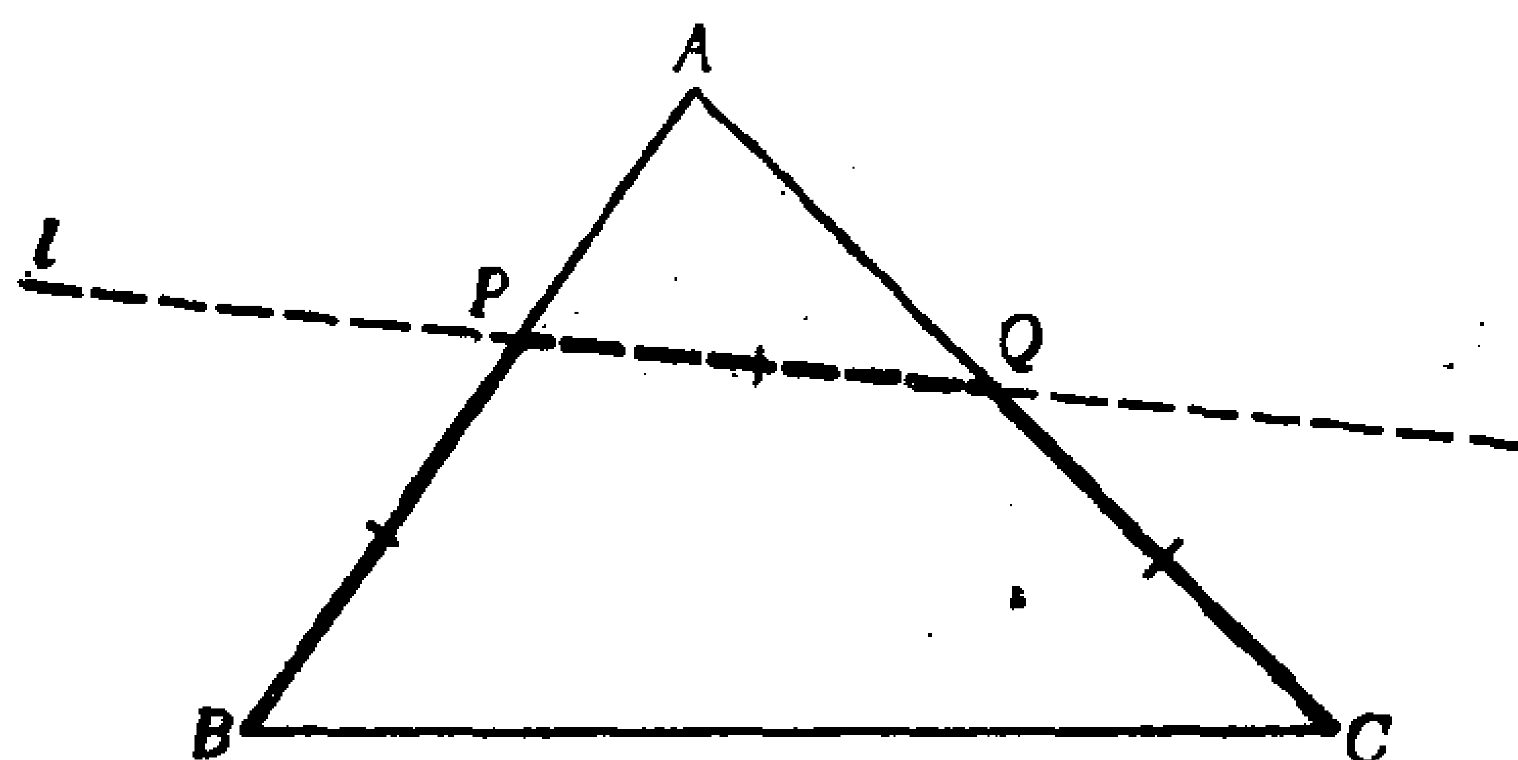


图 59

我们可以利用定理1，2给平面的保距变换下一个定义。事实上，在几何学中讨论变换，我们关心的是变换的结果（即一个图形从哪个位置变到了哪个位置），而不是变换的实际过程（例如一个点在运动中所走的路径，点移动的速度等等）。既然根据定理1，2，任何两个全等图形都可以经过一个平移，或旋转、反射、滑动反射而重合，那么在几何学中我们就能说，这四种保距变换已经是平面上的所有保距变换[①]。而把平面上保距变换的所有情形都列举出来，可以看作是对它的一个定义。因此我们可以说，几何学所研究的是图形在平移、旋转、反射和滑动反射之下不改变的那些性质（见前言4页）。

在数学中（一般地说，在自然科学中），我们能遇到两种不同类型的定义。对于一个新的概念，我们可以通过列举它所具有的所有性质来定义它。例如，平面上的平行线可定义为无论怎么延长总不相交的那些直线；算术级数可定义为相邻两项之差为常数的数列；蒸气机可定义为把热能转变为机械能的机械。这种类型的定义称为描述性定义。我们在定义一个新的研究对象时，也可以不去描述它的性质，而是直接指出如何构造它。例如，平行线可定义为垂直于同一直线的两条直线（这里给出了平行线的一种作法）；算术级数可规定为下述形式的数列：

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\quad \cdots$$

（这里a称为首项，d称为公差）；而蒸气机也可以用对它的结构的描述来给出它的一个定义。这种类型的定义称为构

---

① 在力学中就与此不同，那儿研究运动的过程，因此不可能如此简单地列举出所有平面上的运动。

造性定义。可以这样说，科学的基本任务，是对那些仅仅有描述性定义的概念去寻找它的构造性定义。譬如，发明蒸气机的问题可以看成从它的描述性定义——转变热能为机械能的机械——出发，去找到它的构造性定义，也就是实际地制造它①。

把保距变换定义为不改变点之间距离的变换（见本册前言5页），这是一个典型的描述性定义。在保距变换的理论中，基本的问题是找到它的构造性定义，也就是列举出所有保距变换。而本节的定理1，2恰好就是解决这个问题的，因此是本节的基本结果。

反过来，给了某个概念的构造性定义，如能找到它的简单的描述性定义，则会带来许多方便，譬如有助于研究这个新概念的性质。在本章里我们已经有了这类例子。又例如在先给出平移的构造性定义后，我们又给出它的一个纯粹的描述性定义：平移是平面上的一种变换，它把每条线段 AB 变为与它等长、平行且方向相同的线段 $A'B'$（见12页）。在解决两个平移之和是什么样的变换这个问题时，这个定义是非常有用的；而平移的第一个定义（构造性的）则对解决此问题没有多大用处。同样地，在解决两个旋转之和是什么变换的问题时，我们也是依据旋转的描述性定义：旋转是平面上的一种变换，它把每条线段 AB 变为与它等长、并且与它夹定角 α 的线段（见29页）。读者自己在本书中还能找到别的例子。

---

① 应该注意，对于一个还只有描述性定义的研究对象，找到它的构造性定义实际上也证明了这个研究对象的存在性，而描述性定义是不能说明它的存在性的。下面就是几个没有实际对象的描述性定义的例子："有两条分角线互相垂直的三角形称为 tricornicum"（与本章的26题(a)作对照）；"不用能量就能运转的机械叫做永动机"。这些例子中的对象显然是没有构造性定义的。

习 题 解 答

第一章 位 移

1. 在直线 l 的方向上将圆S_1 平移距离 a，记 S'_1 是所得新圆。设A'和 B'是 S'_1 和 S_2 的两个交点(见图60)。那么过 A'平行于 l 的直线和过 B'平行于 l 的直线都是本题的解(图60中线段AA'和BB'都等于平移的距离 a)。如果将S_1在相反方向上平移距离 a 得 S''_1，则又可得到另外两个解。

随着圆 S'_1和 S''_1与圆S_2 相交情况的不同，本题可能有无穷多个解、四个解、三个解、二个解、一个解以及无解等多种情形，图60中所画的是三个解的情形。

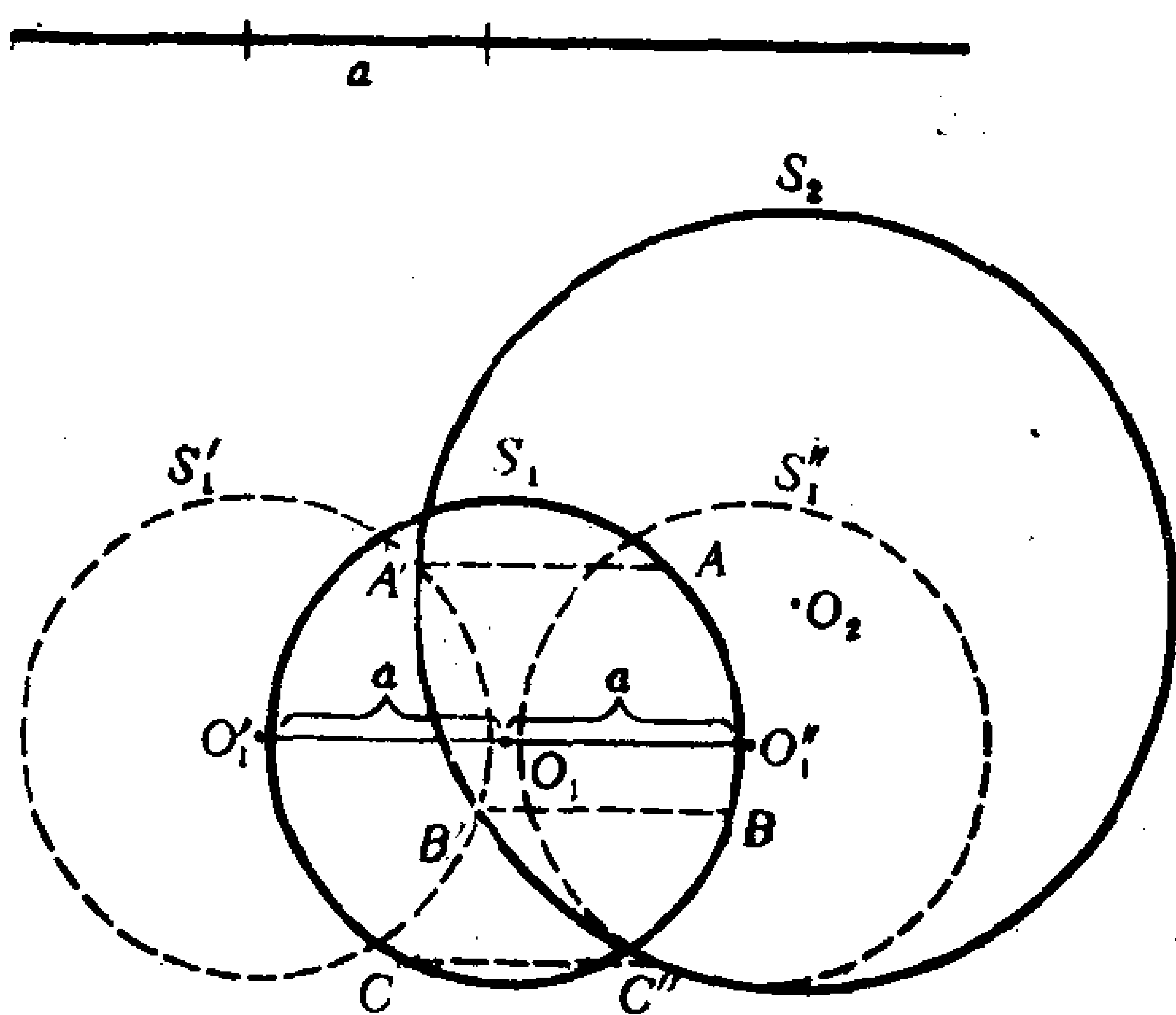


图 60

2. (a) 假定本题已解出。将 MN 平移至 AN'，使得

M点变为A点[图61(a)]。于是$AM=N'N$，因此

$$AM+NB=N'N+NB.$$

这样，$AMNB$是最短路径的充分必要条件是N',N和B在同一直线上。

由此我们得到作图法如下：从A点出发作线段AN'，使其长度等于河宽，与河垂直，方向朝着河；过N'点和B点作直线，设它与靠近B的河岸线的交点为N，就在N点处架桥。

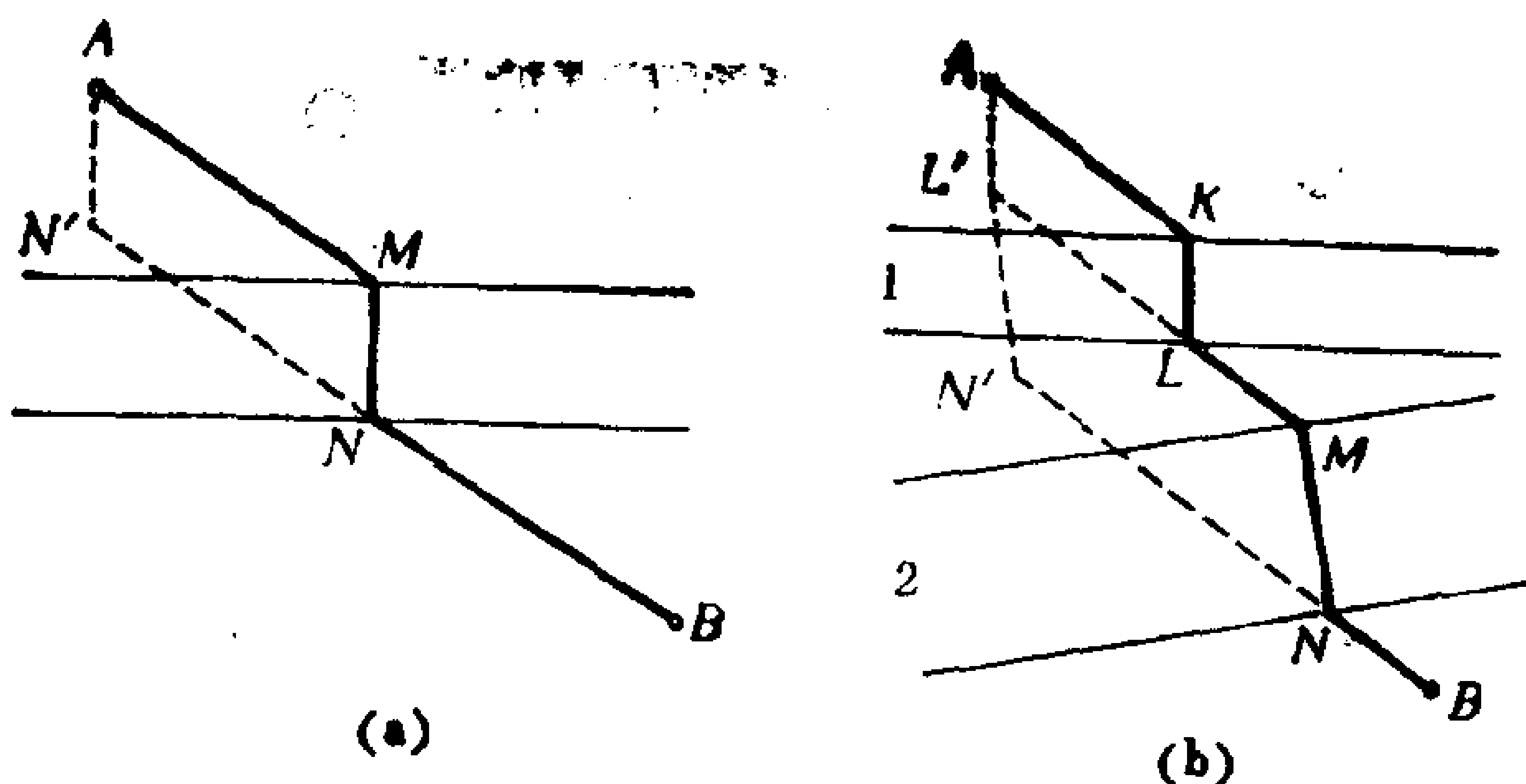


图 61

(b) 为了简单起见，我们考虑有两条河的情况。假定本题已解出，记KL和MN是所架两座桥的位置。将线段KL平移到AL'，使K点变到A点[图61(b)]。于是$AK=L'L$，并且

$$AK+LM+NB=L'L+LM+NB.$$

如果$AKLMNB$是最短路径，则$L'LMNB$是L'到B的最短路径，$LMNB$是L到B的最短路径。但是L与B只相隔第二条河，因此由(a)我们知道怎样作出它们之间的最短路径。

于是我们得到作图法如下：从A点作线段AL'，使其长

度等于第一条河的宽度，并垂直于它，方向朝着它；从L'点作线段$L'N'$，使其长度等于第二条河的宽度，垂直于它，并且方向朝着它；过N'点和B点作直线，记N是它与第二条河的靠近B的河岸线的交点。在N点处架第二条河上的桥。设此桥的另一头在M点处，过M点作直线平行于直线$N'B$，记L是所作直线与第一条河靠近M的河岸线的交点。在L点处架第一条河上的桥。

3. (a) 假设M是平面上的点，满足条件$MP+MQ=a$，

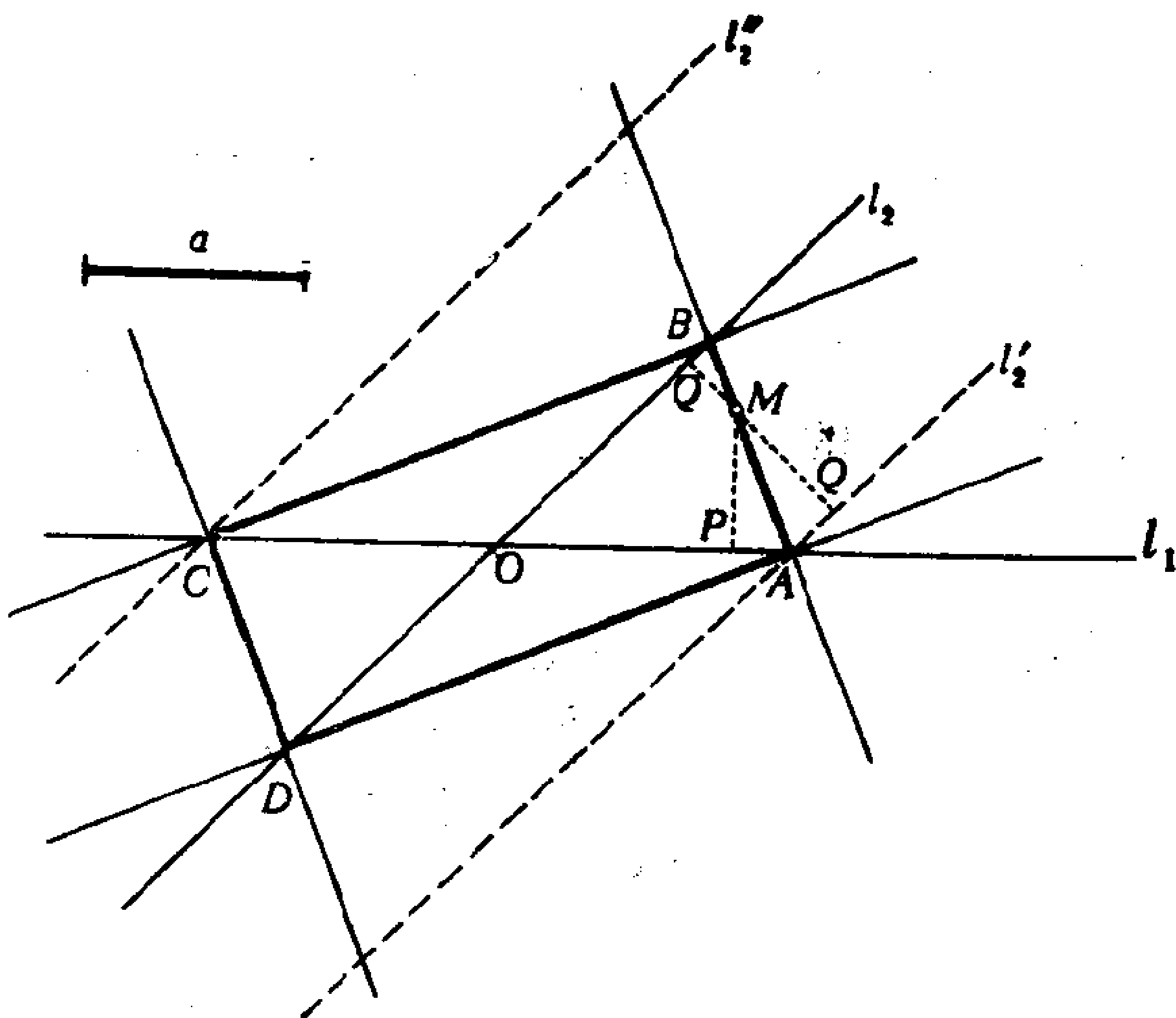


图 62(a)

这里P和Q分别是M点在直线l_1和l_2上的垂足[图62(a)]。将直线l_2在QM方向上平移距离a，所得直线记作l_2'。显然，M到l_2'的距离$MQ'=a-MQ=MP$。因此M在l_1与l_2'所夹的一个角的分角线上。

由上面的分析容易看到，所求轨迹上的所有点都在l_1与

l_2' 或 l_2'' 所构成的角的分角线上，这里 l_2' 和 l_2'' 是将 l_2 在垂直于 l_2 的方向上(两个方向!)平移距离 a 所得到的直线。然而，并非这四条分角线上的所有点都在所求轨迹上。从图62(a)不难看出，仅仅矩形 $ABCD$ 的边界上的点在轨迹上，这里 A, B, C 和 D 是这些分角线的交点。

(b) 设 M 点是平面上满足方程

$$MP - MQ = a \quad 或 \quad MQ - MP = a$$

的点，这里 P 和 Q 分别是 M 在直线 l_1 和 l_2 上的垂足(图62(b)中的 M 满足第二个方程)。在 QM 方向上平移直线 l_2，距离为 a，所得直线记作 l_2'。正如(a)中那样，我们可以说明 M 到 l_1 和 l_2' 的距离相等（见图 62(b)，那里 $MQ - MP = a$，$M_1P_1 - M_1Q_1 = a$）。由此可推出，所求轨迹上的所有点都在 l_1 与 l_2' 或 l_2'' 所构成的角的分角线上。但是在本题的情形，只有矩形 $ABCD$ 之外的点在轨迹上。(图 62(b)中，HBG 和

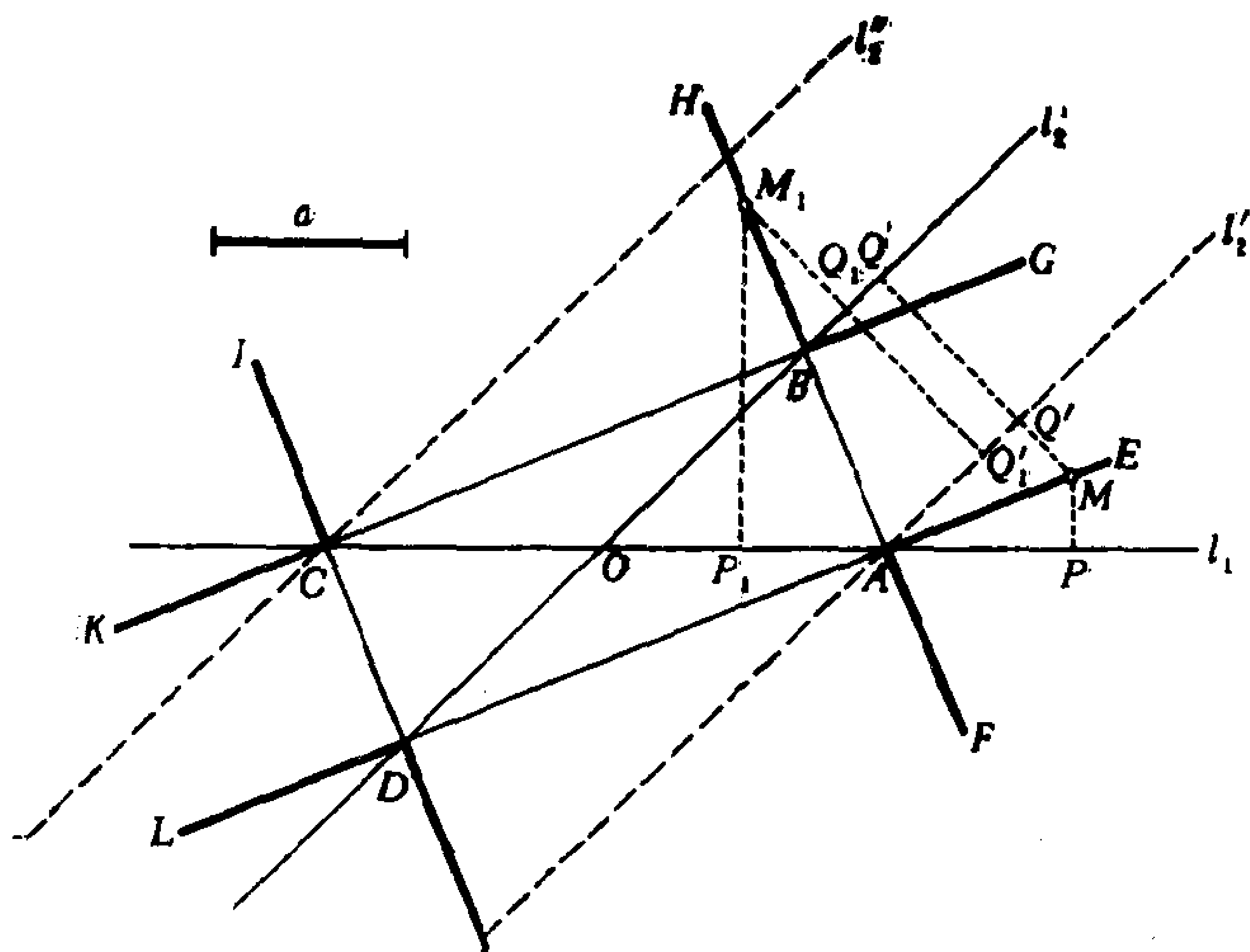


图 62(b)

LDK上的点满足方程 $MP-MQ=a$，EAF 和 ICK 上的点满足 $MQ-MP=a$。）

4．由于三角形BDE可由三角形DAF经过一个平移（在 AB 方向上，距离为 AD）而得到，联结这两个三角形的对应点的线段都是互相平行且相等的。于是

$$O_1O_2=Q_1Q_2, \qquad O_1O_2 \parallel Q_1Q_2.$$

类似地有

$$O_2O_3=Q_2Q_3, \qquad O_2O_3 \parallel Q_2Q_3$$

和

$$O_3O_1=Q_3Q_1, \qquad O_3O_1 \parallel Q_3Q_1.$$

因此三角形$O_1O_2O_3$ 和 $Q_1Q_2Q_3$ 全等。（实际上它们的对应边平行且相等，即一个三角形可由另一个经过一个平移而得到——看13页。）

5．将四边形 $ABCD$ 的 AB 边和 DC 边平移到MB' 和 MC'（图63）。这样所得到的两个四边形$AMB'B$ 和$DM'C'C$都是平行四边形，因此

$$BB' \parallel AM \quad 且 \quad BB'=AM,$$
$$CC' \parallel DM \quad 且 \quad CC'=DM.$$

又有$AM=MD$（M是AD的中点），因而线段 BB' 与CC' 相等且平行。再加上$BN=NC$，就推出

$$\triangle BNB' \cong \triangle CNC'.$$

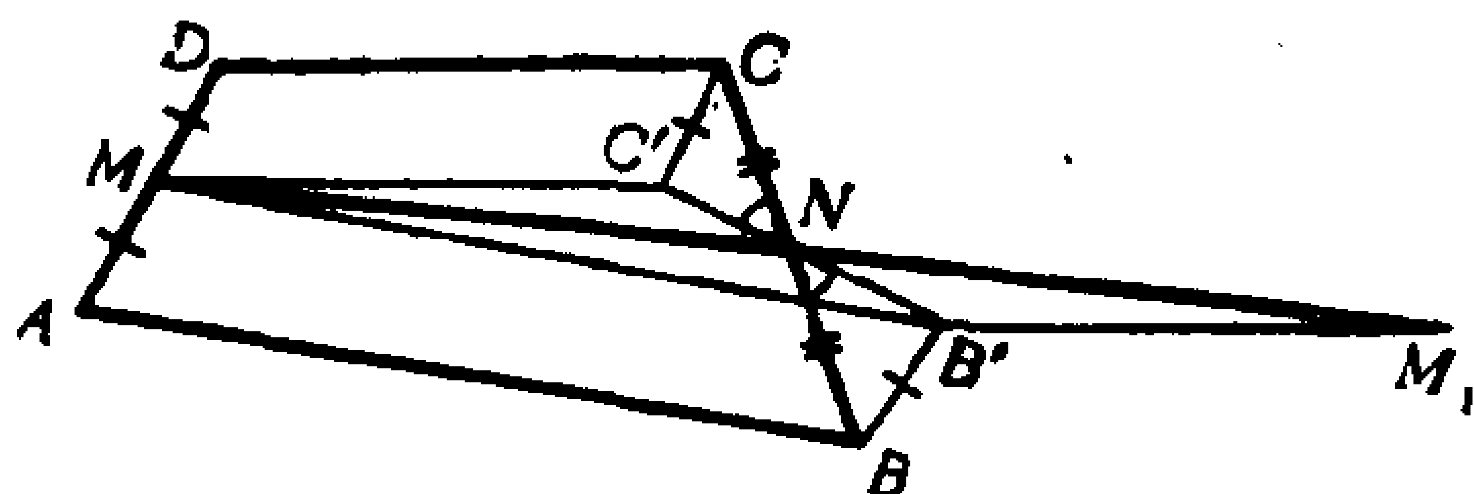


图 63

因此$B'N=NC'$，并且$\angle BNB'=\angle CNC'$，即线段$B'C'$的中点是N，从而MN是三角形$MB'C'$的一条中线。

又由题设，三角形$MB'C'$中，中线MN是相邻两边MB'和MC'之和的一半（因为$MB'=AB$，$MC'=DC$）。延长MN至M_1，使$NM_1=MN$，再联结M_1和B'。这样，我们就得到一个三角形MM_1B'，它的边$MM_1=2MN$，因此也是另外两边MB'和$B'M_1$（$=MC'$）之和。由此推出B'在线段MM_1上，这就意味着

$$MB' \parallel MN \parallel MC';$$

因而
$$AB \parallel MN \parallel DC,$$

即四边形$ABCD$是一个梯形。

6. 假设本题已解出。将线段AX在直线CD的方向上平移距离a，得线段$A'X'$（图64）。

显然$A'X'$过F点。又

$$\angle A'FB=\angle AXB=\frac{1}{2}AmB①,$$

因此我们可认为角$A'FB$是已知的。

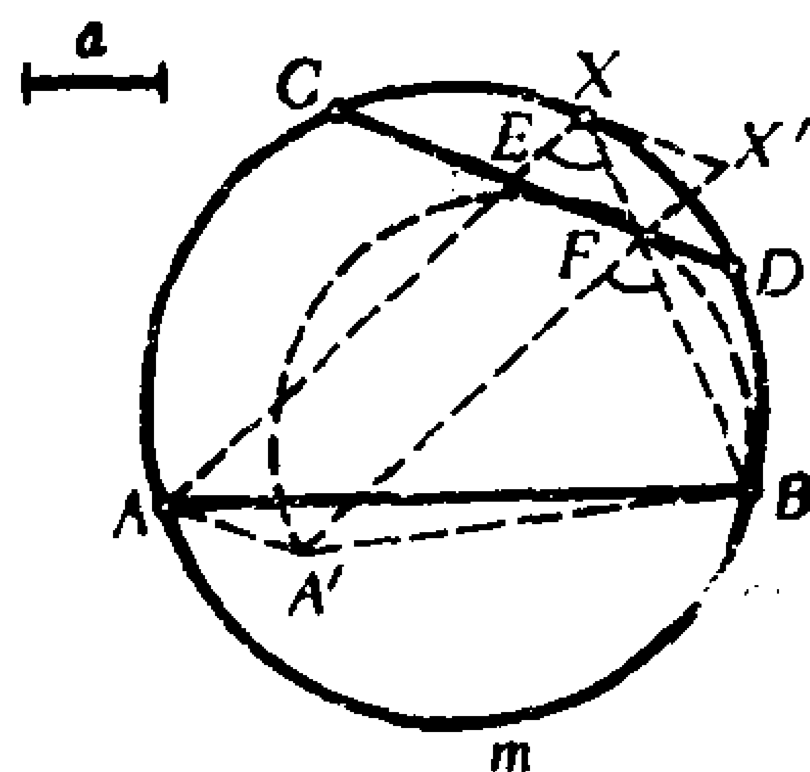


图 64

于是，就有作图法如下：在弦CD的方向上将A点平移距离a，所得点记作A'。以线段$A'B$为弦作圆弧，使得它所含圆周角等于$\angle AXB$（即如果Y是弧上的任一点，则$\angle A'YB=\angle AXB=AmB/2$）。

① AmB表示弧AmB（此处指弧度）。——中译者

如果所作圆弧与弦 CD 有两个交点，则任取其中一点作为 F，直线 BF 与原来圆的另一个交点就是所求的 X 点。因此，在这种情形本题有两个解。

如果所作圆弧与 CD 相切，则切点就是 F 点。因此本题恰有一解。

如果所作圆弧与 CD 不相切也不相交，则本题无解。

如果我们允许 CD 与 AX 和 BX 在延长线上相交（因此交点 E 和 F 在 CD 的延长线上，落在圆外），则本题最多能有四个解（这是因为 A 可以在直线 CD 的两个相反方向上平移）①。

7. (a) 假设本题已解出，即 $M_1M_2=a$（图65）。从圆 S_1 和 S_2 的圆心 O_1 和 O_2 向直线 l 作垂线 O_1P_1 和 O_2P_2（P_1 点和 P_2 点为垂足），则

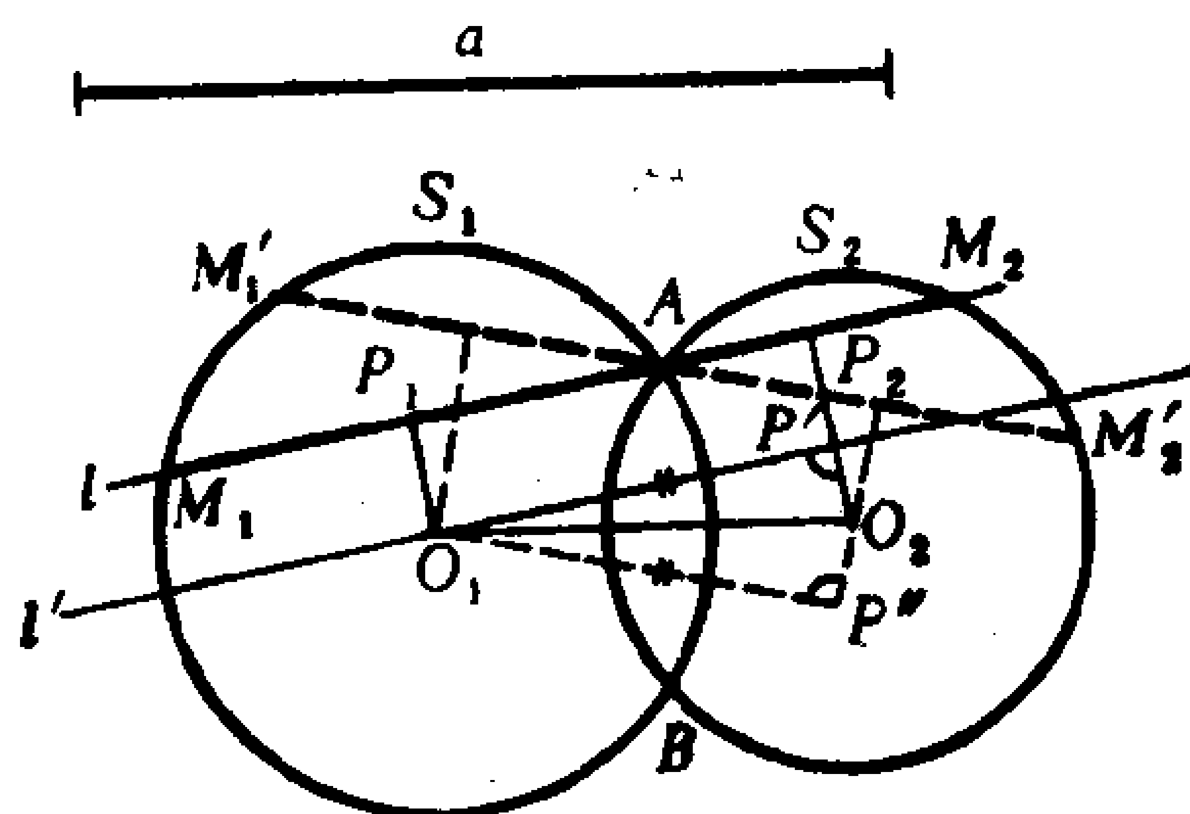


图 65

$$AP_1=\frac{1}{2}AM_1,$$

$$AP_2=\frac{1}{2}AM_2,$$

因此

$$P_1P_2=\frac{1}{2}(AM_1+AM_2)=\frac{1}{2}\ M_1M_2=\frac{1}{2}a.$$

将直线 l 平移成 l'，使 l' 过 O_1 点。设 l' 与直线 O_2P_2 的交点为 P'。则四边形 $P_1O_1P'P_2$ 是矩形，因而

$$O_1P'=P_1P_2=\frac{1}{2}a\ ,$$

---

① 关于解的个数的讨论是英译者加的。

于是我们有作图法如下：以 O_1O_2 为斜边，作直角三角形O_1O_2P'，使$O_1P'=a/2$，那么所求直线 l 平行于 O_1P'。

在$O_1O_2>a/2$时，本题有两个解(在图65中，第二个解用虚线表出)；当$O_1O_2=a/2$时，有一个解，当$O_1O_2<a/2$ 时，无解。

(b) 设 M,N,P 是三个给定点，三角形 ABC 是给定三角形(图66)。在线段MN和MP上作圆弧，使它们所含的圆周角分别等于$\angle ACB$ 和$\angle ABC$。于是，问题就化为：过M点作直线，使其被两个圆弧截下的线段 B_1C_1 的长度等于BC。这就变成(a)了。

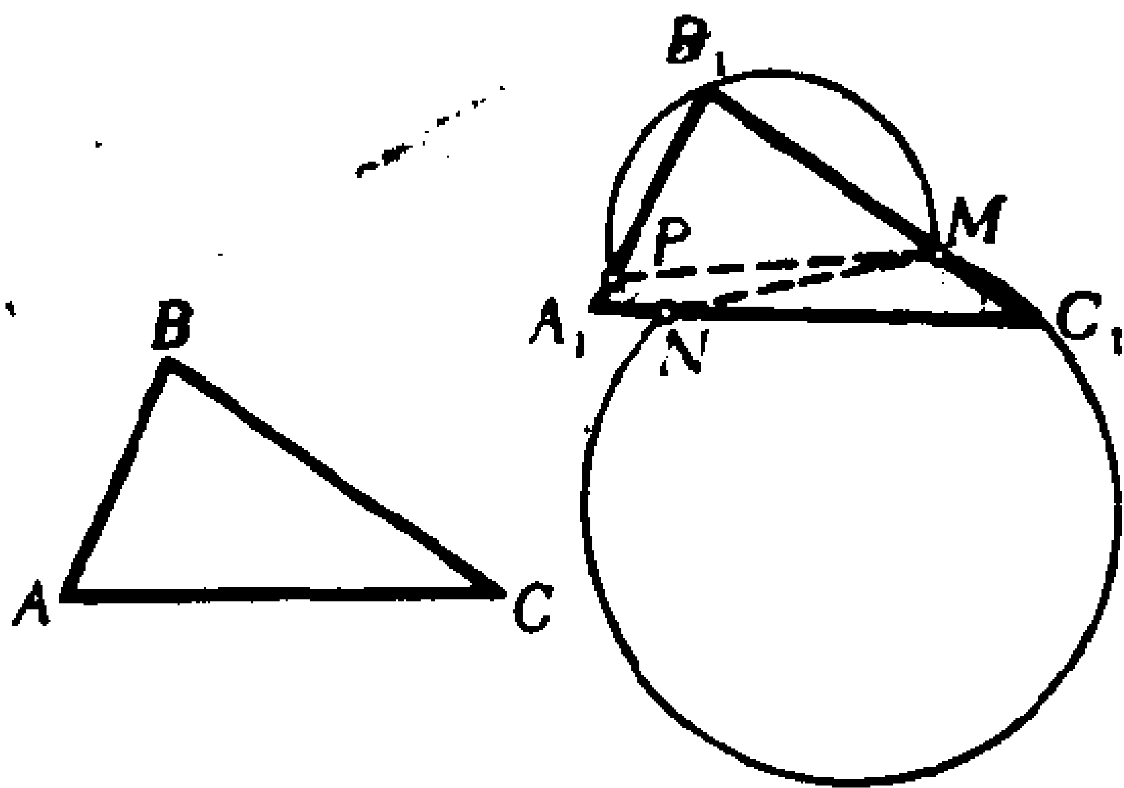


图 66

此题可能有两个解，也可能有一个解或者无解（解的情况还要依赖于给定的三点分别在所求作三角形的哪条边上）。

8. (a) 假设此题已解出；设直线 l 与圆S_1 和 S_2 的交点

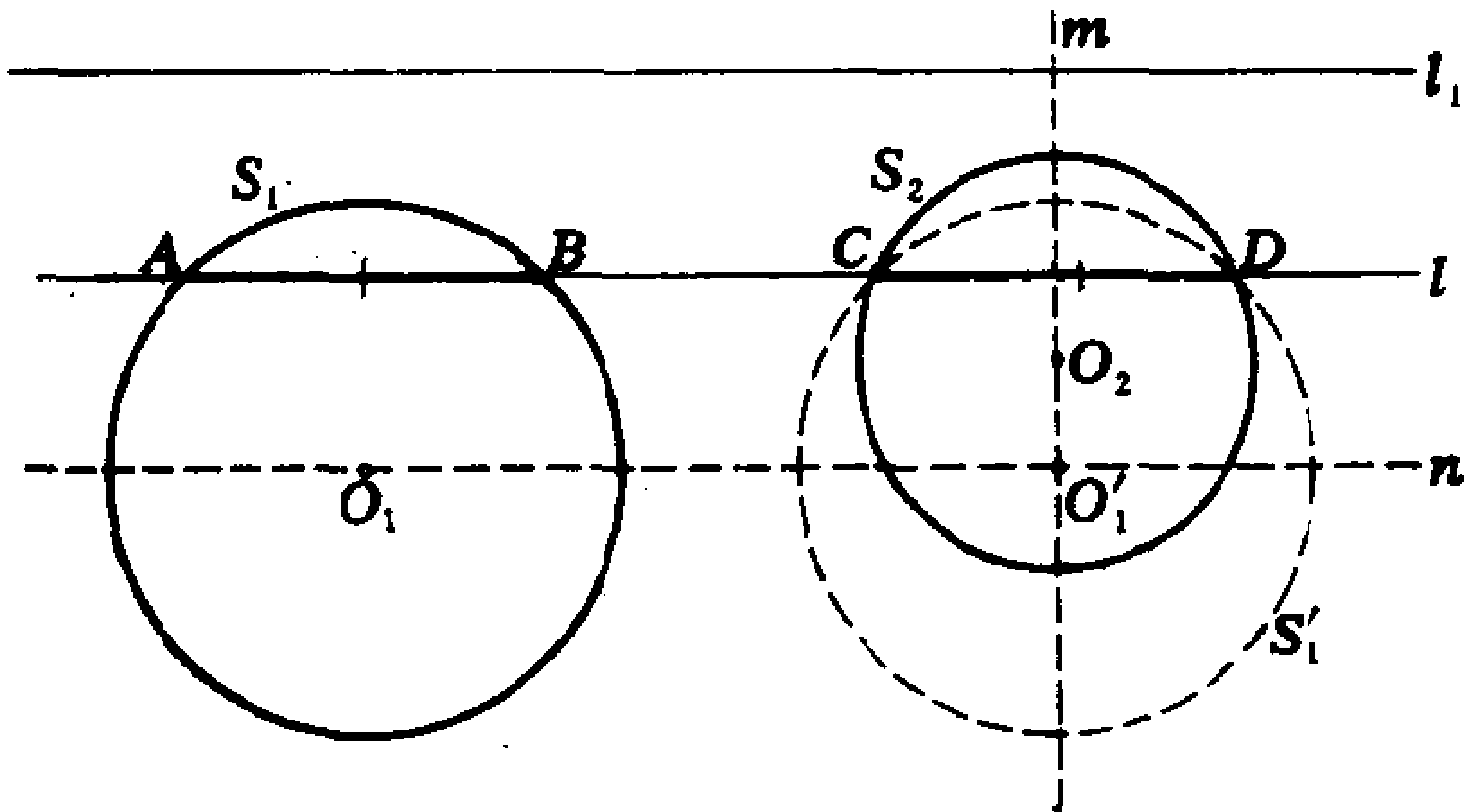


图 67(a)

分别为A，B和C，D[图67(a)]。将圆S_1在直线l的方向上平移一个距离AC，所得新圆记作S'_1。因为$AB=CD$，所以经过上述平移，线段AB将与CD重合。于是，圆S_2和S'_1的圆心O_2和O'_1都在线段CD的中垂线上。

由此我们可得到作图法如下：设m是过S_2的圆心O_2并且与l垂直的直线，n是过S_1的圆心O_1并平行于l_1的直线。记O'_1是m与n的交点，平移S_1使圆心移到O'_1，得新圆S'_1。则过S'_1和S_2的两个交点的直线就是所求作的直线。

本题可能有一个解，也可能无解。

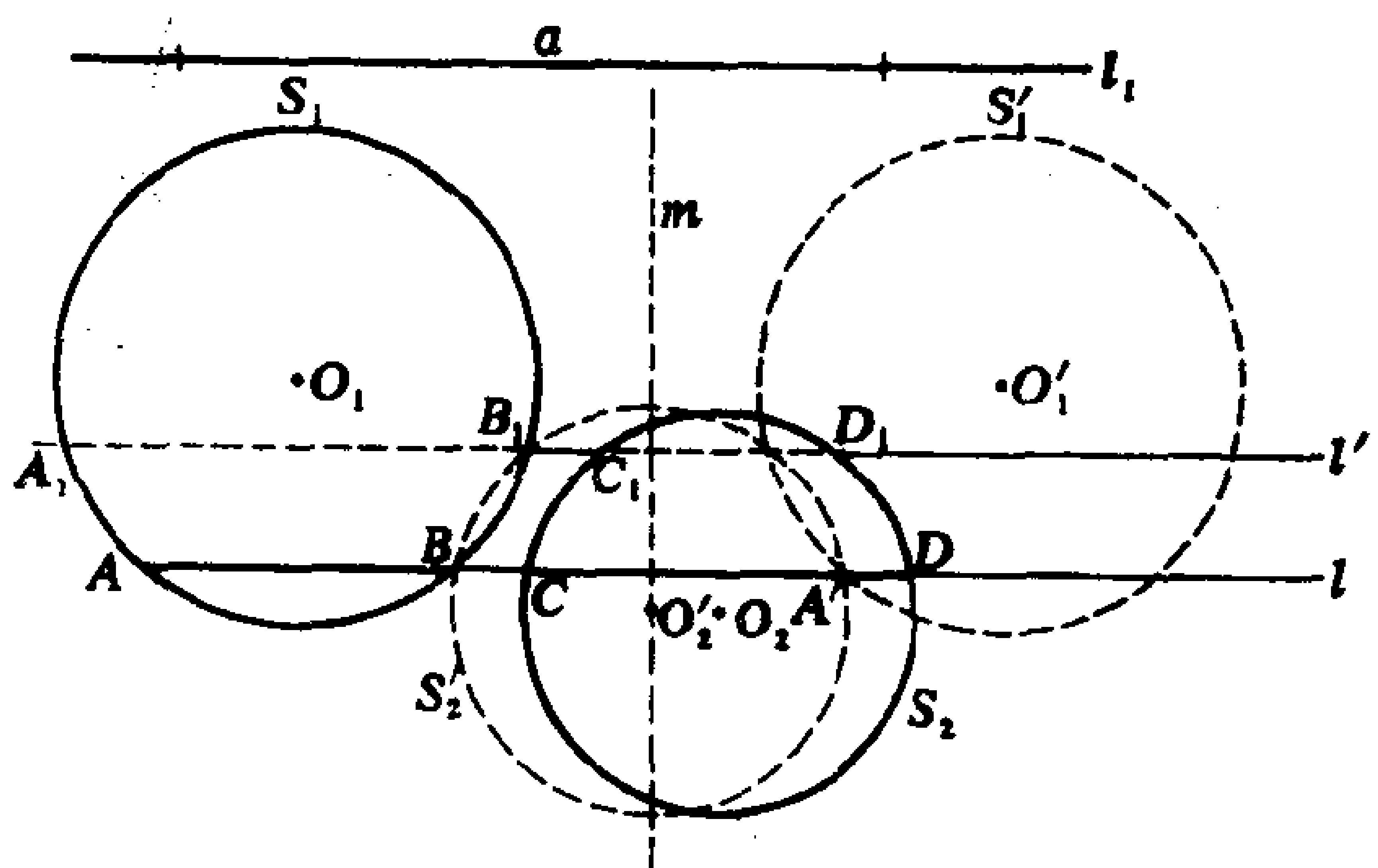


图 67(b)

(b) 假设此题已解出，并设直线l与圆S_1和S_2分别相交于A，B和C，D，使得有$AB+CD=a$[图67(b)]。将圆S_1在直线l的方向上平移距离a，记所得圆为S'_1，则

$$AA'=a=AB+CD,$$

即$A'B=CD$。因此如果将圆S_2在l方向上平移到S'_2，使其圆心O'_2在线段$O_1O'_1$的中垂线上（O_1，O'_1分别是S_1和S'_1的圆心），那么S_2的弦CD就变到BA'。

由此我们得到作图法如下：将圆S_1在直线l_1的方向上

平移距离 a，所得新圆记作 S'_1；再将 S_2 在 l_1 方向上平移到新圆 S'_2，使其中心在线段 $O_1O'_1$ 的中垂线 m 上。S_1 和 S'_2 的交点（在图中就是 B 和 B_1 点）决定了所求的直线。本题最多有两个解，解的个数依赖于 S_1 和 S'_2 的交点的个数（图67(b)中是有两个解的情形）。

本题的另一半——作 l，使它被两圆截得的两弦之差等于给定值——可用类似方法解出。

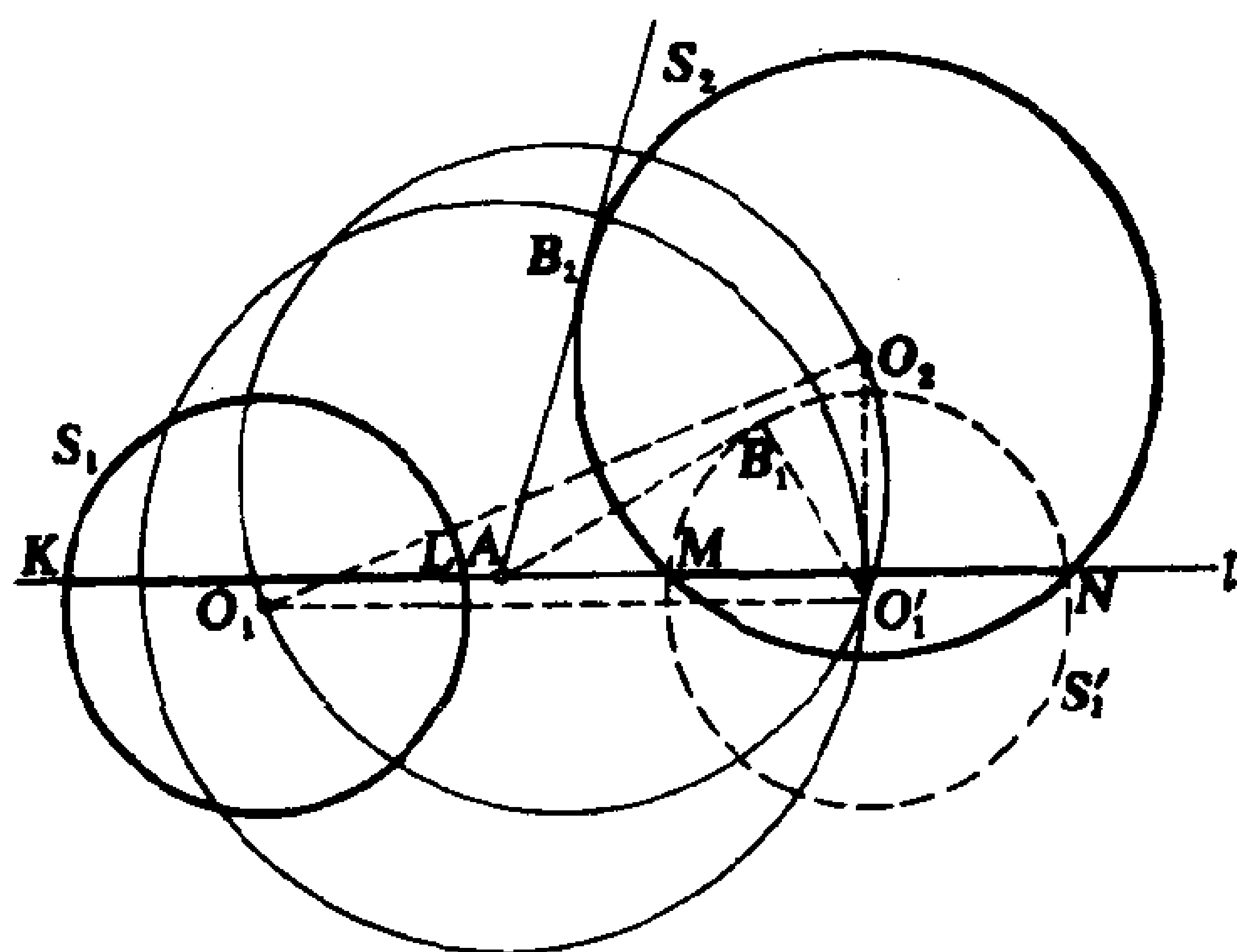


图 68

(c) 假设此题已解出（图 68，直线 KN 就是所求的直线 l）。在直线 KN 的方向上平移 S_1，使线段 KL 与 MN 重合，所得新圆记作 S'_1。这时圆 S_2 和 S'_1 有公共弦 MN。

设直线 AB_1 和 AB_2 分别是由 A 点向圆 S'_1 和 S_2 作的切线（B_1 和 B_2 分别是切点）。则

$$(AB_1)^2 = AM \cdot AN, \qquad (AB_2)^2 = AM \cdot AN,$$

因此
$$(AB_1)^2 = (AB_2)^2.$$

这样我们就能求 AO'_1 了（O'_1 是圆 S'_1 的圆心）：

$$AO'_1 = \sqrt{(O'_1B_1)^2 + (AB_1)^2} = \sqrt{r_1^2 + (AB_2)^2},$$

这里r_1是圆S_1的半径；而且，我们知道$\angle O_1O'_1O_2$是直角，这是因为S'_1和S_2的圆心的连线O'_1O_2垂直于它们的公共弦MN，从而也和平行于l的线段$O_1O'_1$垂直。由此我们能找到O'_1点了。

我们用下面的方法作图：以A为圆心，以

$$\sqrt{r_1^2+(AB_2)^2}$$

为半径作圆；又以O_1O_2为直径作圆。以这两个圆的一个交点O'_1为圆心，r_1为半径作圆S'_1。S_2与S'_1的交点M和N决定的直线MN就是本题的一个解。A点确实在直线MN上，否则等式$(AB_1)^2=(AB_2)^2$不会成立。（如果直线AM与圆S_2和S'_1交于不同点N_2和N_1，则我们有$(AB_2)^2=AM\cdot AN_2$和$(AB_1)^2=AM\cdot AN_1$）。又因为$O_2O'_1$垂直于MN，而$O_1O'_1$垂直于$O_2O'_1$，所以$O_1O'_1 \parallel MN$，也就是说O_1和O'_1分别到S_2和S'_1的弦KL和MN的距离相等。由此推出KL和MN等长，这正是所要求的。

本题至多有两个解。

9. 作直线l经过关于A点的中心对称所变得的直线l'（图69）；设P'是l'与圆S的一个交点。那么直线$P'A$是本题的一个解，因为$P'A$与l的交点P是P'点关于A点的中心对称象，从而有$P'A=PA$。

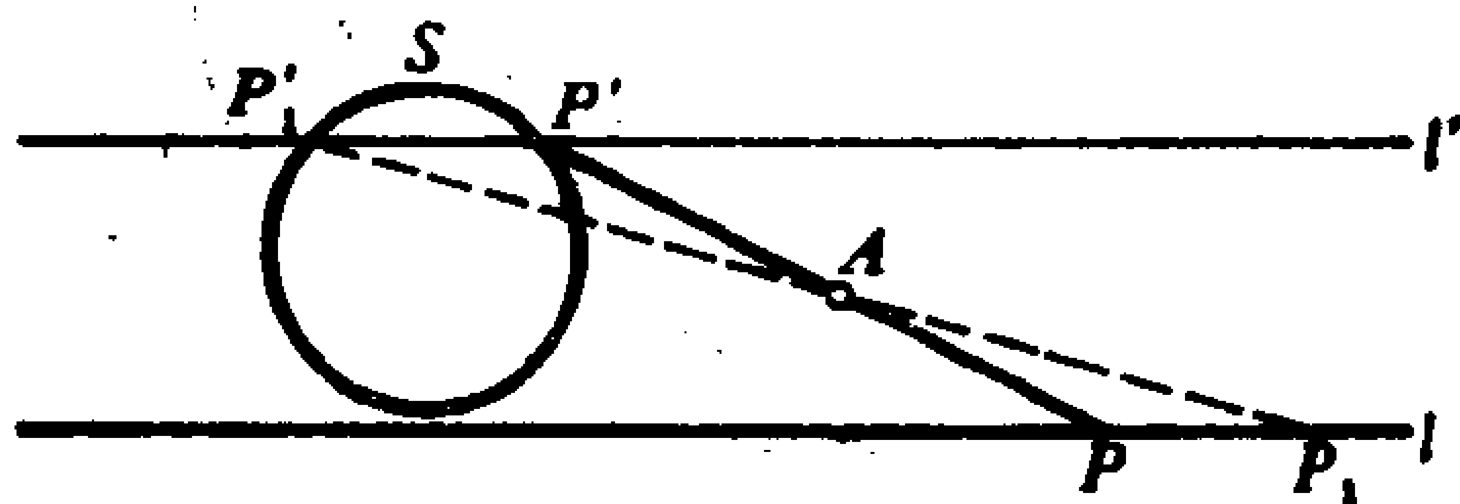


图 69

本题至多有两个解。

10. (a) 作圆S_2经过关于A点的中心对称所变得的圆S'_2[图 70(a)]，圆 S_1和 S'_2也相交于A点，另一个交点记作P'. 则直线 $P'A$ 是本题的解，因为它与圆 S_2 的另一交点P是 P' 关于A点的对称点，有 $P'A=AP$.

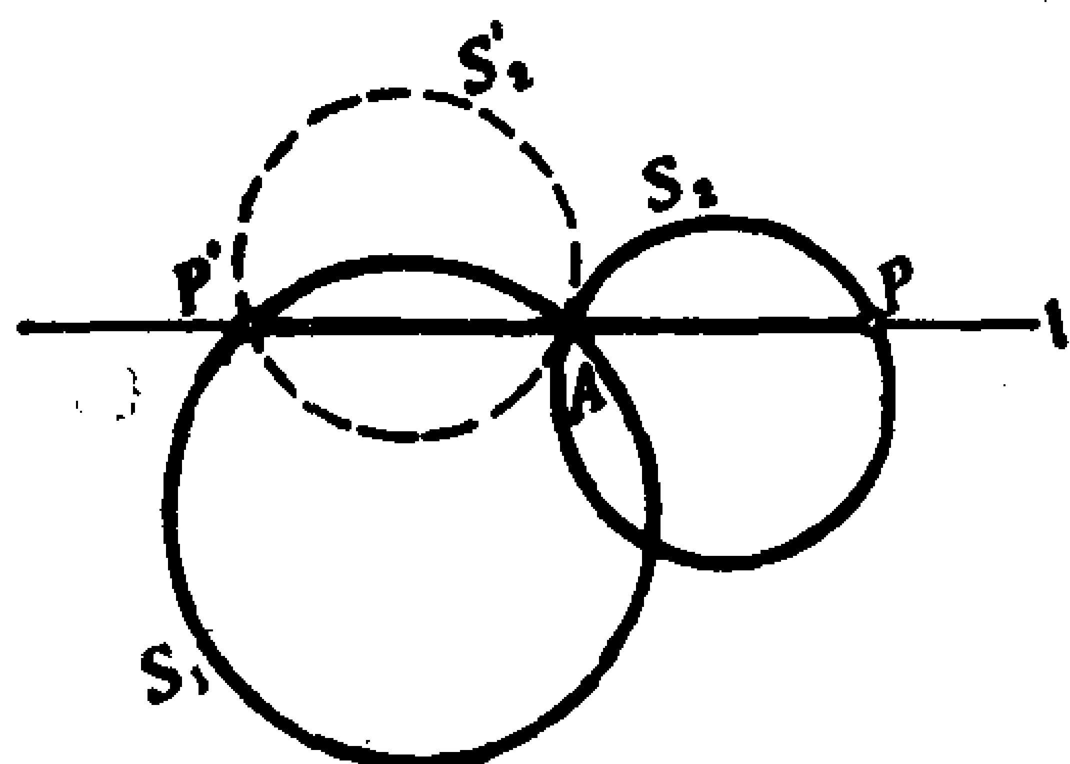


图 70(a)

如果圆S_1和S_2相交于两个点，则本题恰有一个解。如果这两圆相切，则当它们半径不同时无解，半径相同时有无穷多个解。

附注：本题是 8 题(c)的特殊情形，但解法更简单。

(b) 作圆S_2经过关于A点的中心对称所变得的圆S'_2. 假设本题已解出，图70(b)中的直线 MAN就是解。设 N' 是

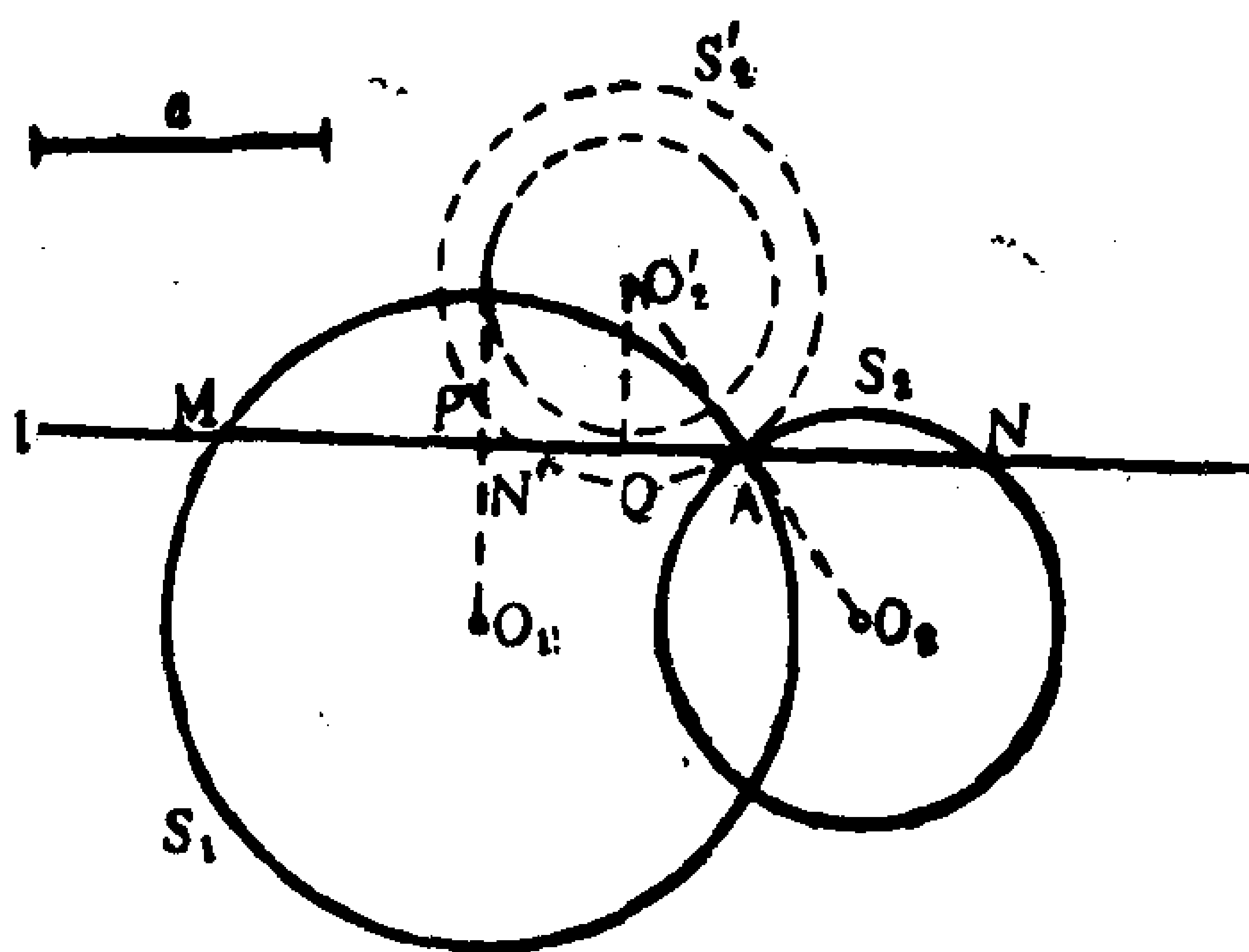


图 70(b)

此直线与圆 S'_2 的交点，则 $MN'=a$. 从圆 S_1 和 S'_2 的圆心 O_1 和O'_2向直线MAN作垂线 O_1P和 O'_2Q(P,Q为垂足)，则

$$PA=\frac{1}{2}MA, \qquad QA=\frac{1}{2}N'A,$$

从而

$$PQ=PA-QA=\frac{1}{2}(MA-N'A)=\frac{1}{2}a.$$

于是O_2'到直线O_1P的距离等于$a/2$，也就是说，以O_2'为圆心，$a/2$为半径的圆与直线O_1P相切。这样，从题设条件我们就能作出直线O_1P来了。有了O_1P，再作直线MAN垂直于O_1P，从而得到本题的一个解。

本题最多有两个解。

11. 假设本题已解出(图71)，并设$A'X'$是由线段AX经过关于J点的中心对称而得的线段。因为AX过E点，所以$A'X'$过F点。由于$X'A'\parallel XA$，我们有

$$\angle X'FB=\angle AXB=\frac{1}{2}AmB;$$

因此，

$$\angle A'FB=180^\circ-\angle X'FB,$$

并且可以认为

$$\angle A'FB=180^\circ-\frac{1}{2}AmB$$

是已知的。

图 71

这样我们就得到作图法如下：设A'是A点关于J点的

对称点。在线段$A'B$上作一圆弧，使它所含圆周角是

$$180^\circ-\frac{1}{2}AmB.$$

此圆弧与弦CD的交点就是F点，而直线BF与圆周的另一交点就是所求的X点。

本题有唯一解。但是，如果允许弦CD与AX和BX在延长线上相交，则可能有两个解(参看6题的解)。

12. 假定图形F有两个对称中心O_1和O_2(图72)。设O_3

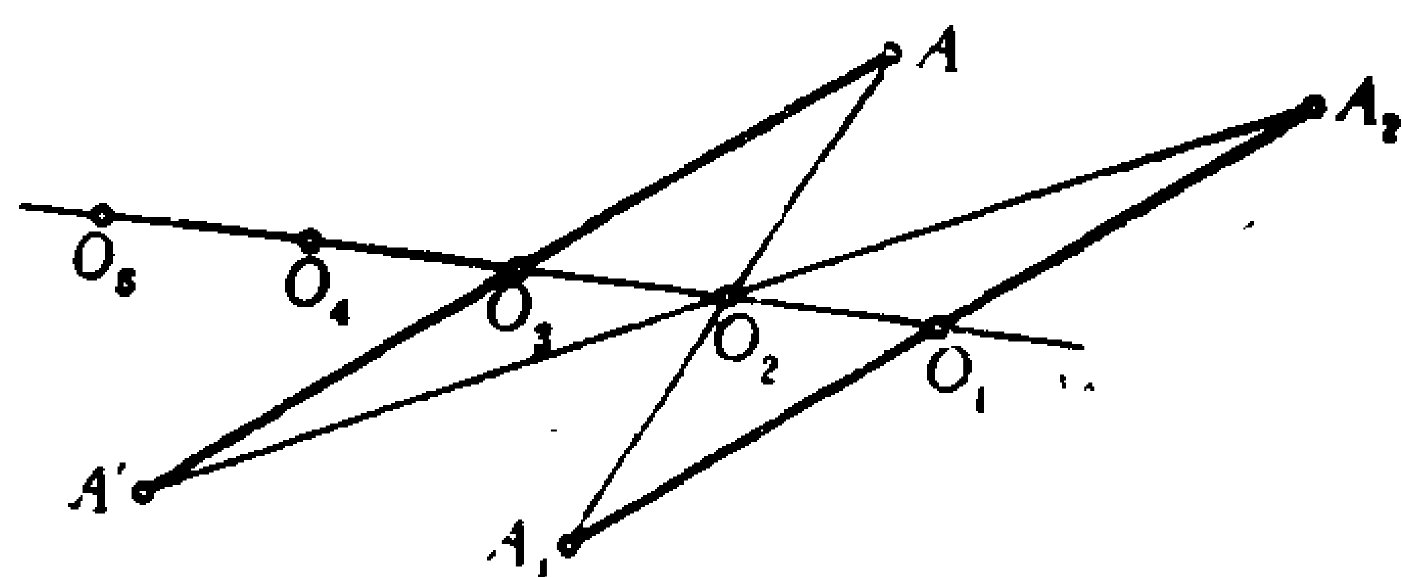


图 72

点是O_1点关于O_2点的中心对称象，则O_3也是F的一个对称中心。事实上，如果A是F上的任意一点，记A_1是A点关于O_2点的对称点，A_2是A_1点关于O_1的对称点，A'是A_2点关于O_2的对称点，则A_1, A_2和A'都是F中的点(因为O_1, O_2都是F的对称中心)。由于AO_3和A_1O_1，A_1O_1和A_2O_1，A_2O_1和$A'O_3$这三对线段都相等、平行且方向相反，线段AO_3和$A'O_3$是相等、平行且方向相反的，因此A'是A关于O_3的对称点。

这样，F上任意一点A关于O_3的对称点A'仍是F的点，也就是说O_3是F的一个对称中心。

类似地，我们可以推出O_2关于O_3的对称点O_4，O_3关于O_4的对称点O_5等等都是F的对称中心。这样我们就看出：如果F有两个不同的对称中心，则它必定有无穷多个对称中心。

13. (a) 线段A_nB_n是由AB相继作关于$O_1,O_2,\cdots,O_n$的n次中心对称所得到的(n为偶数)。但是,关于O_1与O_2的两次中心对称之和为一个平移，关于O_3与O_4的中心对称之和是一个平移，关于O_5与O_6的中心对称之和是一个平移，……，最后，关于O_{n-1}和O_n的中心对称之和也是平移。因此，A_nB_n是由AB经过$n/2$次平移而得到的。因为任意个平移之和仍为平移，所以A_nB_n也是AB经过一次平移所得到的。于是，有$AA_n=BB_n$。

如果n是奇数，那么本题的结论是不正确的，因为奇数个中心对称之和是一个平移加上一个中心对称，它也是一个(关于另一点的)中心对称(见19页)，因此一般地说，$AA_n \neq BB_n$ (但$AB_n=BA_n$)。

(b) 因为奇数个中心对称之和还是一个中心对称(看(a)题的解)，所以由A相继作关于$O_1,O_2,\cdots,O_n$的n次中心对称所得的A_n点，也可由A关于某一点O作中心对称而得到。点A_{2n}是由A_n作同样的n次中心对称而得到的，因此它也是A_n作关于O点的中心对称而得到的点。这就可推出$A_{2n}=A$。

如果n是一个偶数，则A_n是由A经过一个平移而得到的点，而A_{2n}又是由A_n经过同一个平移而得到的点，因此一般来说A_{2n}与A不会重合。(只有当上述平移是恒等变换，即平移距离为0时，它们才重合[①]。)

14. (a) 关于O_1点和O_2点的两个中心对称的和是一个平移(看19页)，关于O_3点和O_4点的两个中心对称之和是另一个平移(一般来说与第一个不同)。于是，"第一"点A_4是A点经过这两次平移得到的，而"第二"点(我们记作A_4')

---

① 括号中这句话是英译者加的。

是A经过同样两个平移得到的，只是进行的次序与第一次相反。但是，两个平移之和与进行的次序是无关的。（要证明这个断言，只须看图73，B点和C点分别是A点经过线段MN和PQ表示的平移而变得的；D点是B点经过PQ表示的平移所得的点，它也是C点经过MN表示的平移所得的点，由此得到断言。）

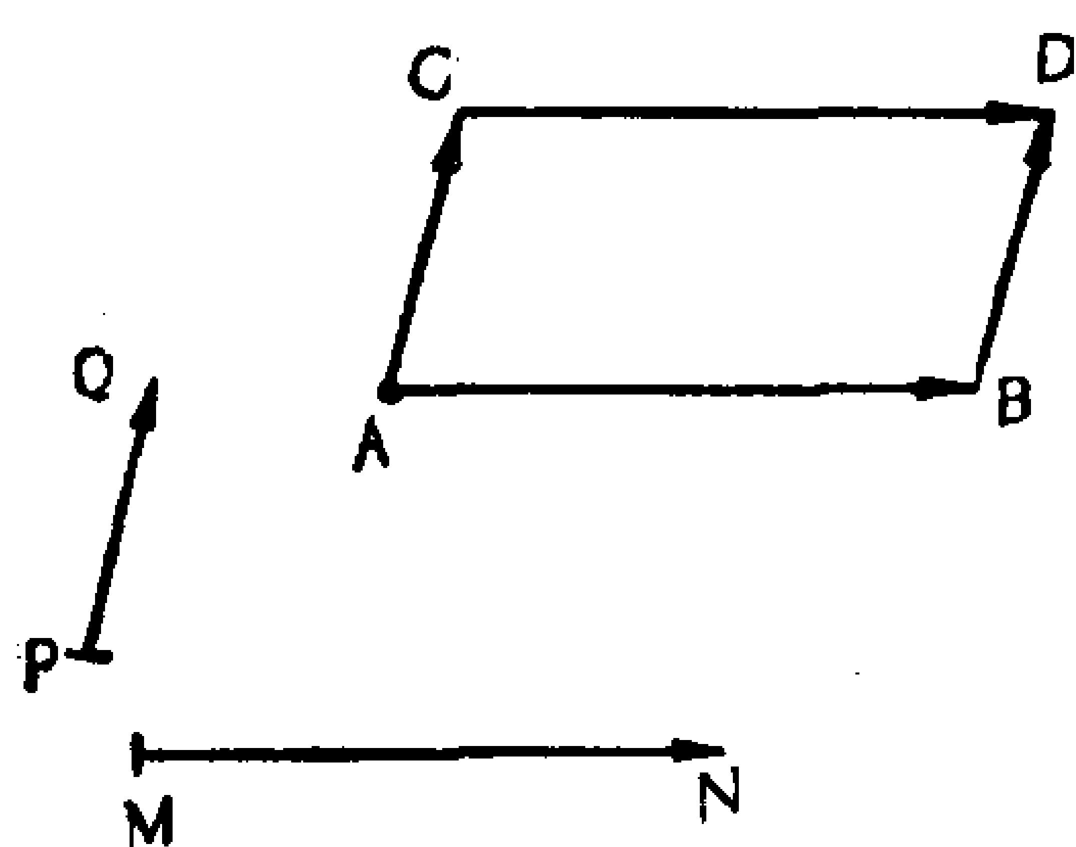


图 73

(b) 此题显然与13题(b)相同($n=5$)，因为13题(b)告诉我们，若A点相继作关于O_1, O_2, O_3, O_4, O_5的中心对称变得的点记作A_5，则A_5以同样的次序作这五次中心对称后就回到A点。

(c) 当n是奇数时，最后的位置相同(看13题)。

（在n为偶数的情形($n=2k$)，如果有一个k边形$M_1M_2\cdots M_k$，使得它的边$M_1M_2, M_2M_3, \cdots, M_kM_1$分别与线段$O_1O_2, O_3O_4, \cdots, O_{n-1}O_n$相等、平行且方向相同，那么以两种次序作$n$个中心对称所得两点也是重合的（这时，在这两种次序下作的关于$O_1, O_2, \cdots, O_n$的n个中心对称之和都是距离为零的平移，即恒同变换）。）

15. 第一个解法。假设此题已解出，并设$A_1A_2\cdots A_9$是这个九边形，它的各边中点是$M_1, M_2, \cdots, M_9$(图74(a)，这里取$n=9$)。任取平面上一点B_1，记B_2是B_1经过关于M_1点的中心对称得到的点，B_3又是B_2经过关于M_2的中心对称得到的点……如此继续，直至得到B_{10}（它是B_9经过关于M_9的

中心对称而得到的点）。在线段序列 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \cdots,$ A_1B_{10} 中，从第二条起，每一条都是前一条经过一个中心对称

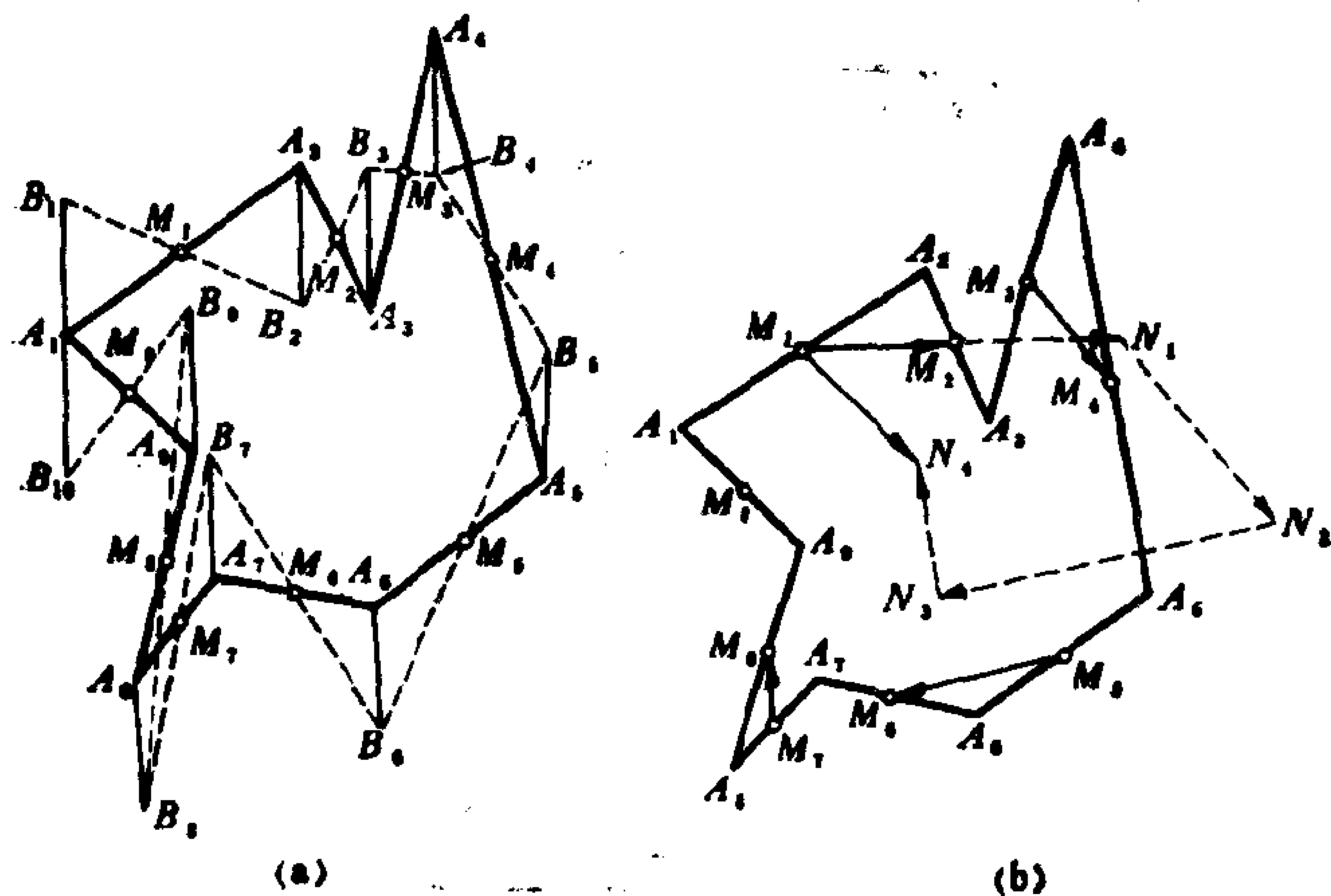


图 74

称而变得，因而这些线段互相平行，长度相等，并且相邻两条方向相反。于是A_1B_1和A_1B_{10}相等、平行，而方向相反，也就是说A_1点是线段B_1B_{10}的中点。这样我们就能找到A_1了，因为从任一点B_1出发，总能找到B_{10}的。剩下的顶点$A_2, A_3, \cdots, A_9$可以用关于$M_1, M_2, \cdots, M_9$的一系列中心对称来求出。

本题总有唯一解；但是，解得的九边形并不一定是凸多边形，甚至它的各边还可能相交。

当 n 是偶数时，如果我们也假定已解出，并重复上面的推理，就将看到线段 A_1B_{n+1} 与A_1B_1相等、平行且有相同的方向，也就是说它们重合。因此，如果 B_{n+1} 与B_1不重合，那么本题无解；如果 B_{n+1}与B_1重合，则不管A_1怎样选取，A_1B_1 总是与 A_1B_{n+1} 重合的，因而在这种情况下本题有无穷

多个解，而且平面上任一点都可被选作为顶点 A_1。

第二个解法。所求 n 边形的顶点 A_1，在关于 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 这 n 个点上的中心对称之和的作用下还是变到自己，也就是说，A_1 是这 n 个中心对称之和的不动点(见图74(b)，那里取 $n=9$)。如果 n 是偶数，则这 n 个中心对称之和是一个平移（见13题(a)的解）。因为一般来说平移没有不动点，所以在 n 是偶数的情形本题一般无解，只有当这 n 个中心对称之和是恒同变换(即距离为零的平移)时才有例外。恒同变换保持平面上每一点不动，因此在这种情况下本题有无穷多个解，平面上任何一点都可取作顶点 $A_1$①。如果 n 是奇数(例如 $n=9$)，则 n 个中心对称之和是一个中心对称。因为一个中心对称恰好有一个不动点，就是它的对称中心，所以，所求九边形的顶点 A_1 一定就是这个对称中心，从而本题有唯一解。

下面我们来说明，如何找到关于 $M_1,M_2,\cdots,M_9$ 的九个中心对称之和的对称中心。关于 M_1 和 M_2 的中心对称之和是一个平移，它是在 M_1M_2 方向上移动距离 $2M_1M_2$，关于 M_3 和 M_4 的中心对称之和是在 M_3M_4 方向上移动距离 $2M_3M_4$ 的平移，…。这样，前八个中心对称之和就等于四个平移之和；这四个平移的方向分别为 M_1M_2(或 M_1N_1)，M_3M_4($\parallel N_1N_2$)，M_5M_6($\parallel N_2N_3$)，M_7M_8($\parallel N_3N_4$)，移动距离分别为 $2M_1M_2$ ($=M_1N_1$)，$2M_3M_4$($=N_1N_2$)，$2M_5M_6$($=N_2N_3$)，$2M_7M_8$ ($=N_3N_4$)[图74(b)]，它们之和就是在 M_1N_4 方向上移动距离为 M_1N_4 的平移。这个平移与关于 M_9 的中心对称之和仍是一个中心对称，其对称中心就是所要找的 A_1。要求出 A_1 只

---

① 见16题(b)解答后面的附注，那儿讨论了 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 满足这种情况的条件。

须在 M_9 处作线段 M_9A_1，使它平行于N_4M_1（方向也一致！——中译者），长度等于$N_4M_1/2$（见图74(b)，并对照图18)。找到A_1后，再找九边形剩下的那八个顶点就没有困难了。

16.(a) 设四边形$ABCD$ 各边的中点分别为M,N,P和Q[图 22(a)]。则当将A点按照 M,N,P,Q 的次序作关于它们的四次中心对称时仍回到A点。但是，这种情形只在关于M，N，P，Q的四个中心对称之和是恒同变换时才会发生。另一方面，这四个中心对称之和恰好等于两个平移之和，这两个平移的方向分别是MN和PQ，平移距离分别为$2MN$和$2PQ$。这样，我们就推出MN和PQ平行、长度相等且方向相反；也就是说，四边形$MNPQ$是一个平行四边形。

(b) 和(a)中一样，我们可推出分别以M_1M_2,M_3M_4，M_5M_6为方向，以$2M_1M_2,2M_3M_4,2M_5M_6$为距离的三个平移之和是一个恒同变换。因此存在一个三角形，它的边分别平行于M_1M_2,M_3M_4,M_5M_6，且长度分别等于$2M_1M_2,2M_3M_4$，$2M_5M_6$。由此又可推出存在一个三角形，它的各边分别与线段M_1M_2,M_3M_4,M_5M_6平行且相等。

用同样的方法可以证明：存在一个三角形，它的三边分别与线段M_2M_3,M_4M_5,M_6M_1平行且相等。

附注：利用16题(b)的解答中所用的方法，我们可以说明：有$2n$个点$M_1,M_2,\cdots,M_{2n}$恰好是某一个$2n$边形的各边中点的充分必要条件是存在一个n边形，它的各边分别与线段$M_1M_2,M_3M_4,\cdots,M_{n-1}M_n$平行并且长度相等。这时也存在一个$n$边形，它的各边分别与$M_2M_3,M_4M_5,\cdots,M_{2n}M_1$平行且长度相等。

17. 让直线l_1绕A点旋转α角得新直线l'_1。设M是直线l_2与l'_1的交点(图75)。那么以A点为圆心，并且过M点的圆

就是本题的一个解，因为它与 l_1 的交点 M' 绕 A 点旋转 α 角得到 M 点(也就是说角 $M'AM=\alpha$)。

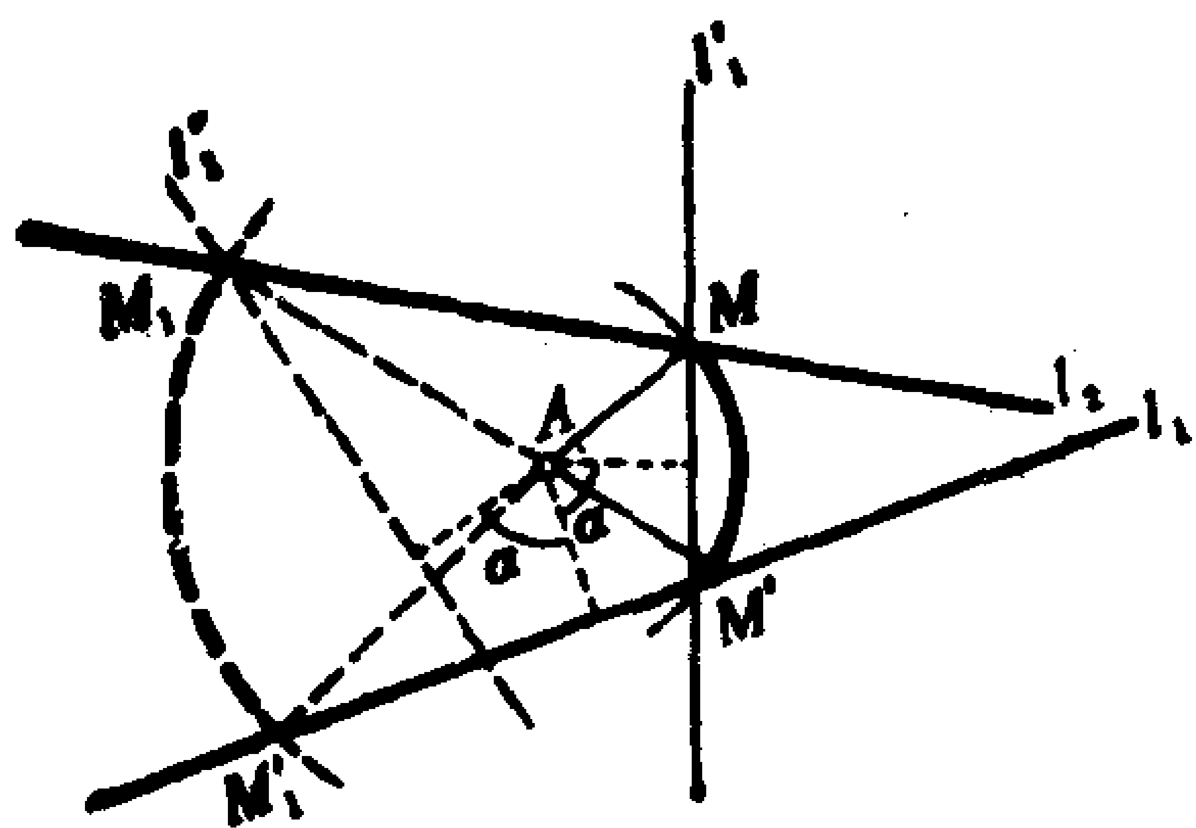


图 75

如果直线 l_1 和 l_2 的两个夹角都不等于 α，则本题有两个解（对应于两个旋转方向）。当 l_1 与 l_2 的夹角中有一个等于 α 时，本题或者只有一个解，或者有无穷多解。当 $\alpha=90°$，l_1 与 l_2 垂直时，本题或者无解，或者有无穷多解。

18. 假设此题已解出，ABC 就为所求作的三角形，它的顶点 A，B，C 分别在直线 l_1，l_2，l_3 上(图76)。把直线 l_2 绕 A 点在 B 到 C 的方向上旋转 $60°$ 角，于是 B 点变到 C 点。

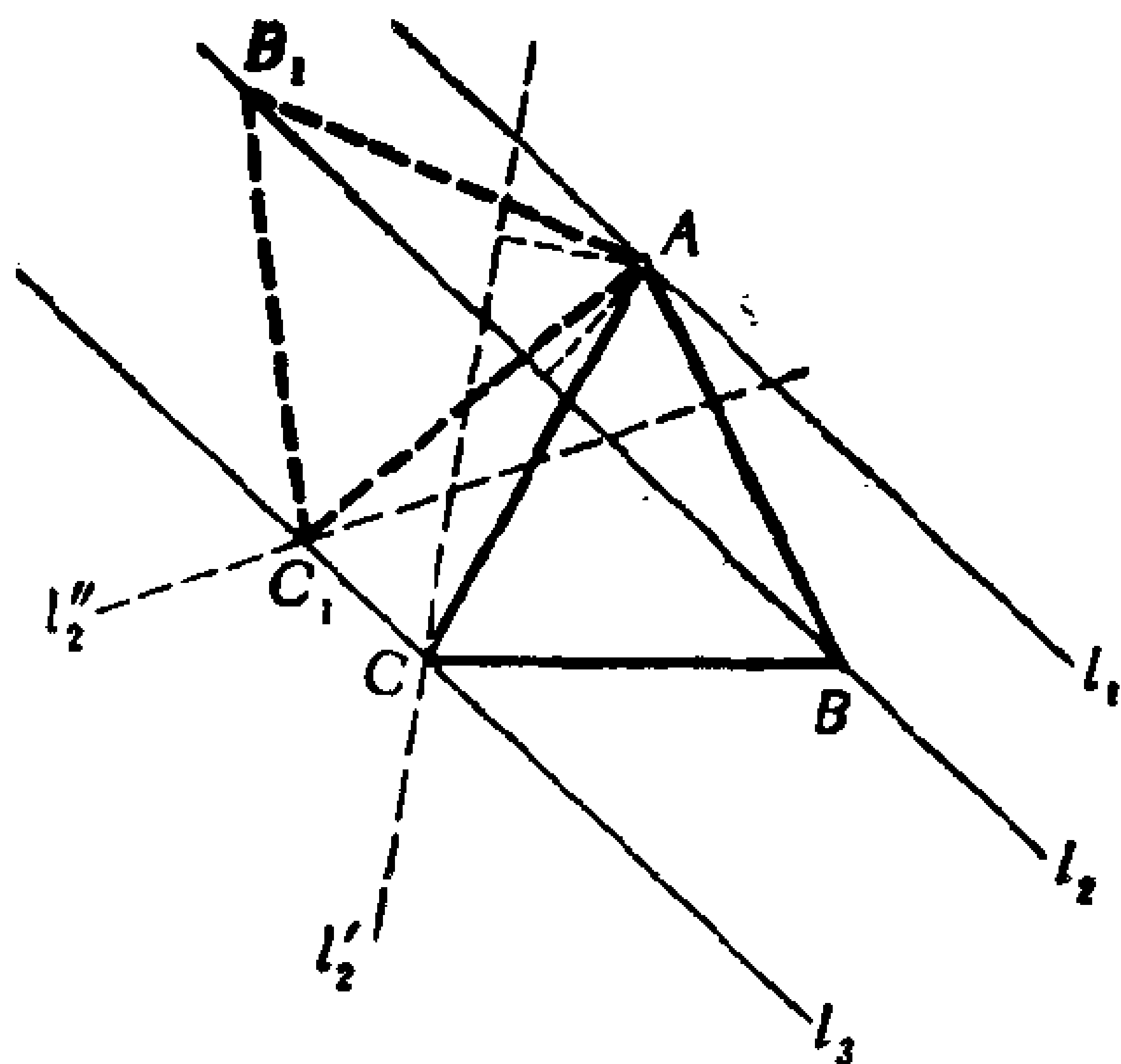


图 76

由此我们可得到作图法如下：在直线 l_1 上任意选定一点 A，把 l_2 绕 A 点旋转 $60°$ 角得 l'_2，则直线 l'_2 与 l_3 的交点

就是所求三角形的顶点C。因为l_2可在两个方向上绕A点旋转60°角，所以本题有两个解，它们是两个互相全等的三角形。

至于作等边三角形，使它的三顶点分别在给定的三个同心圆上的问题完全可类似地去解。

附注：如果我们在直线l_1上选取另一点A'代替A点，那么所得等边三角形恰好是图76中的三角形经过在l_1方向上的一个平移所变得的，平移的距离为AA'的长度。在几何学中，我们是对它们不加区别的(见前言)。由于这个理由，我们并不考虑本题的解对于l_1上的A点位置的依赖关系。如果三条直线l_1，l_2和l_3不平行，则虽然问题也可完全同样的解决，但是在这种情况下我们必须认为，对于直线上A点的不同选择，本题有不同的解（因为所得等边三角形不再都是全等的了），从而有无穷多个解。

与此完全相同，作等边三角形，使它的三顶点分别在三个同心圆S_1，S_2和S_3上的问题最多可能有四个解(A点在圆S_1上的不同选取所得的解不加以区别，因为它们只相差一个旋转，其旋转中心就是三个圆的公共圆心)。另一方面，如果圆S_1，S_2和S_3不是同心圆，那么本题将有无穷多个解(A点在S_1上的不同选取要确定不同的解)。

19. 假设弧CD已经找到(图77)。将线段BD绕S的圆心O旋转α角，得新线段$B'C$，则它与线段AC构成的角$ACB'=\alpha$。

这样，我们就可得到作图法如下：将B点绕O旋转α角，得B'点。过A点与B'点作圆弧，使它所含的圆周角为α(这就是说，若C是圆弧上任意点，则$\angle ACB'=\alpha$)。这圆弧与圆S的交点就是C点。

本题最多可有四个解（圆弧与圆可能有两个交点，并且

B点可在两个方向上绕O点旋转)。

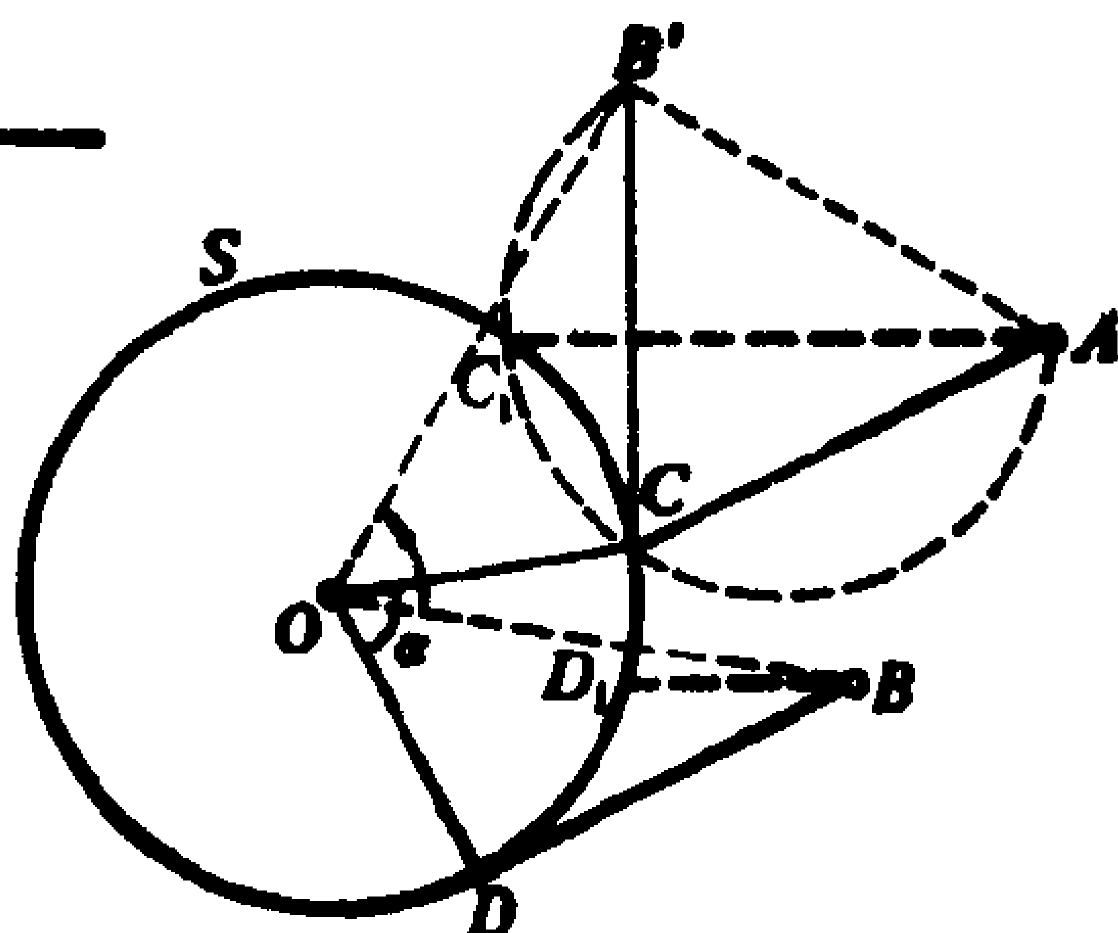


图 77

20. 假设直线l_1和l_2已作出(图78)。将圆S_1绕A点旋转α角，得新圆S'_1，那么圆S_2和S'_1就在直线l_2上截下等长

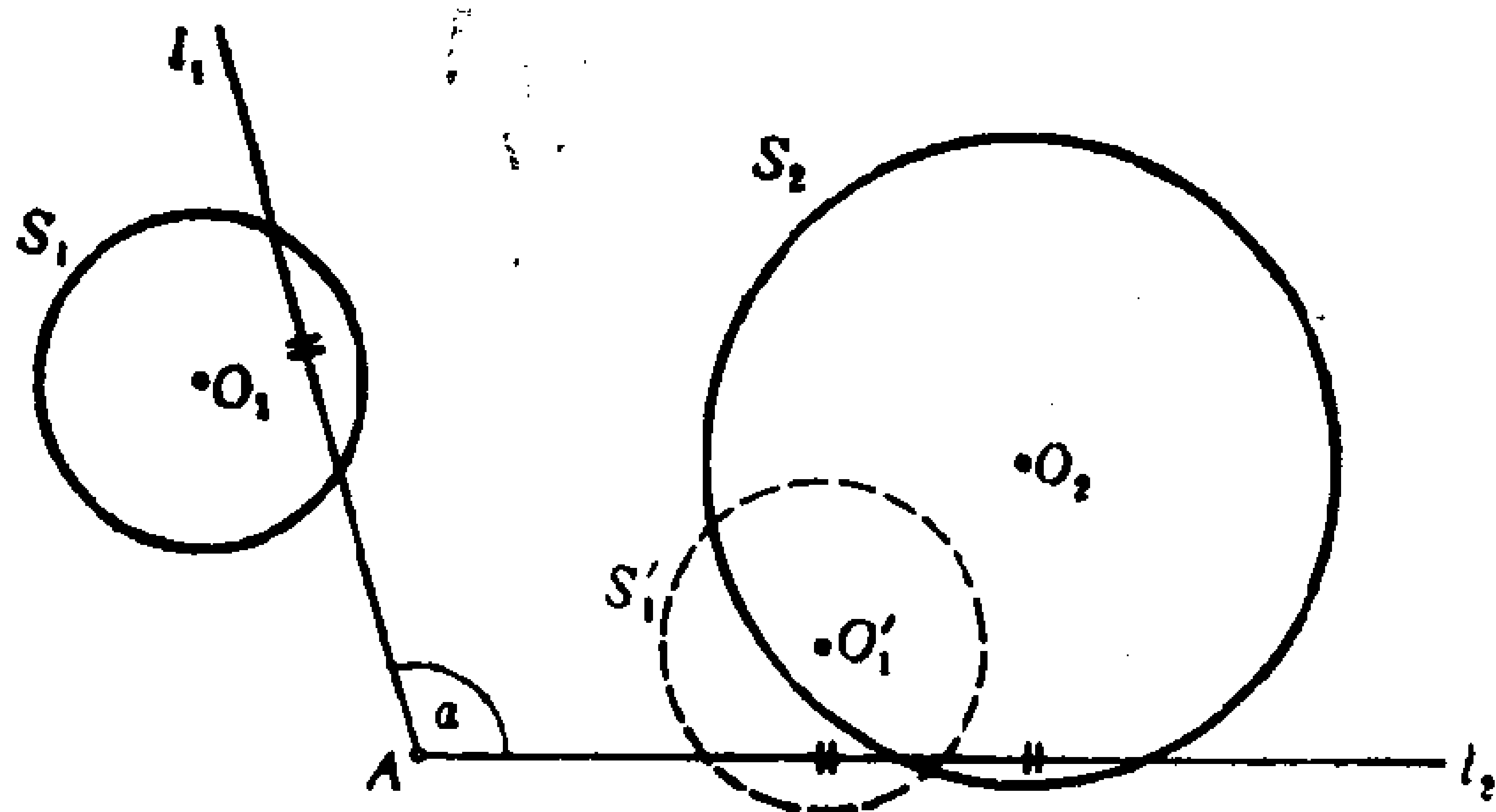


图 78

的弦，于是本题就被化成8题的(c)了，这就是说求作直线l_2，使其过A点，并且S_2和S'_1在l_2上截得等长的弦。作出了l_2后，再将它绕A点旋转α角就得到l_1。直线l_1和l_2就是本题的解。

本题最多可有四个解(因为 S_1 可在两个方向上绕 A 点旋转，也就是有两种途径将本题化成 8 题(c)；而 8 题(c)本身又可能有两个解)。

21. 第一个解法(对照 15 题的第一个解法)。假设本题已解出，$A_1A_2\cdots A_n$ 是所求的 n 边形(见图79，那里 $n=6$)。

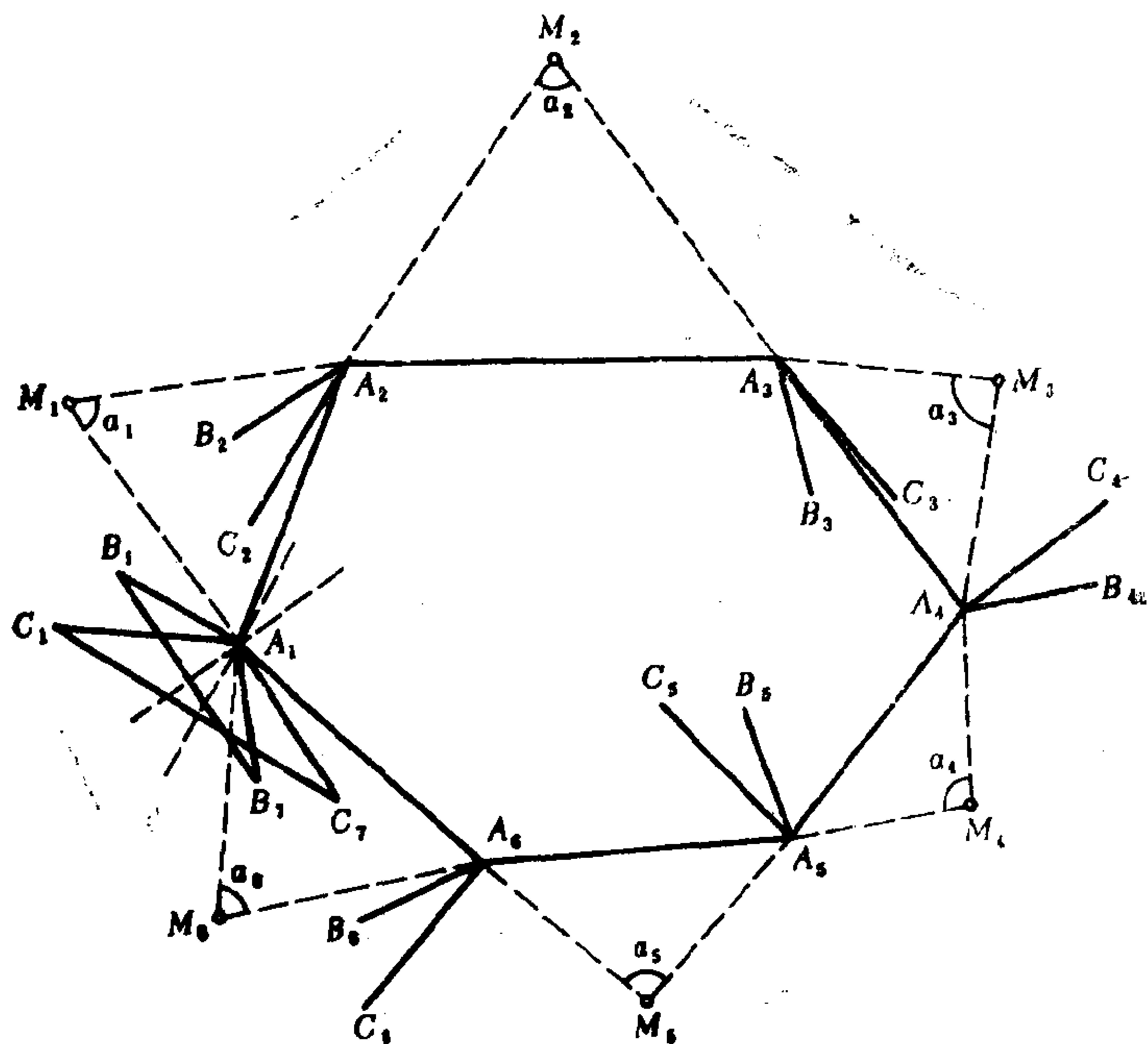


图 79

在平面上任意选取一点B_1。规定一系列旋转如下：第一个绕 M_1 点转 α_1 角，第二个绕M_2 点转α_2角，…，第 n 个绕M_n 点转 α_n 角。线段 A_1B_1 被第一个旋转变到线段 A_2B_2，而 A_2B_2 又被第二个旋转变到线段A_3B_3，…，最后，线段 A_nB_n 被第 n 个旋转变到 线 段 A_1B_{n+1}。所有这些线段都是相等的，因

此 n 边形的顶点 A_1 到 B_1 点和 B_{n+1} 点是等距的（B_{n+1} 是 B_1 点经过这 n 个旋转而变得的点）。我们再在平面上取第二点 C_1，照样作上述的一系列旋转，把 C_1 点变为 C_{n+1}，则 C_1 和 C_{n+1} 又是与 A_1 等距的。于是，n 边形的顶点 A_1 就可找到：它就是线段 B_1B_{n+1} 的中垂线与 C_1C_{n+1} 的中垂线的交点。找到 A_1 点后，将它绕 M_1 点旋转 α_1 角就得到 A_2 点；将 A_2 绕 M_2 点旋转 α_2 角就得到 A_3 点，如此继续直至得到全部 n 个顶点。如果 B_1B_{n+1} 的中垂线和 C_1C_{n+1} 的中垂线相交（也就是 B_1B_{n+1} 和 C_1C_{n+1} 不平行），则本题有唯一解：如果那两条中垂线平行，但是不重合，则本题就无解；如果那两条中垂线是重合的，则本题有无穷多个解①。

这个解法解得的多边形不一定是凸多边形，甚至它的各边可能相交。

第二个解法（对照15题的第二个解法）。顶点 A_1 是分别以 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 为中心，以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为转角的 n 个旋转之和的不动点（这些旋转依次变 A_1 为 A_2，变 A_2 为 A_3，变 A_3 为 $A_4, \cdots$，最后一个变 A_n 为 A_1）。而 n 个转角分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的旋转之和是一个转角等于

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

的旋转，除非 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 是 $360°$ 的整数倍；当 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 是 $360°$ 的整数倍时，这 n 个旋转之和为一个平移（这可从关于两个旋转之和的定理推出）。一个旋转只有一个不动点即它的旋转中心。因此，如果

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

---

① 此话不对。对于取定两点 B_1 和 C_1，线段 B_1B_{n+1} 的中垂线与 C_1C_{n+1} 的中垂线重合时可能无解，也可能有唯一解。而在 $B_1=B_{n+1}$，$C_1=C_{n+1}$ 时有无穷多解。——中译者

不是 360°的整数倍，则 A_1 点是分别以 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 为中心，以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为转角的 n 个旋转之和（它也是旋转）的旋转中心。实际上要找出 A_1 点，只须重复应用正文中所给出的找两个旋转之和的中心的方法①。

一个平移(不是恒同)是没有不动点的。因此如果

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

是 360° 的整数倍，则一般来说本题就没有解。然而，当绕 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的转角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$（$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 是 360°的整数倍）的 n 个旋转之和是恒同变换时，本题有无穷多个解(平面上任意一点可选作顶点 A_1)。

于是，如果 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 180°$(这正是 15 题中考虑的情形)，则当 n 是奇数时有唯一解，当 n 是偶数时或无解，或有无穷多个解。

22. (a) 规定三个旋转，它们的转角都是 120°，而旋转中心分别是 O_1, O_2, O_3(见正文中图31)。第一个旋转把 A 变到 B，第二个把 B 变到 C，第三个把 C 变到 A。

于是，A 是这三个旋转之和的不动点。但是，一般情况下三个转角为120°的旋转之和是平移，因而没有不动点。从 A 是不动点这个事实我们就推知，上述三个旋转之和为恒同变换(距离为零的平移)。前两个旋转之和是一个转角为240°的旋转，它的中心是下列两条直线的交点：一条过 O_1 点，另一条过 O_2 点，且每条直线与 O_1O_2 都夹60°角。记 O 是这个旋转中心，则三角形 O_1O_2O 是等边三角形。这个旋转与中心为 O_3，转角为 120° 的旋转之和是恒同变换，于是 O 与 O_3 一定重合。因此三角形 $O_1O_2O_3$ 是等边三角形，这正是所要证明

① 在作图过程中，也可能需要寻找一个平移与一个旋转之和（是一个旋转）的中心。对此可参考30页或45--46页上的内容。

的。

用同样的方法可以说明，在三角形 ABC 的三边上向三角形“内”作的三个等边三角形的中心 O'_1, O'_2, O'_3 也构成等边三角形(图80)。

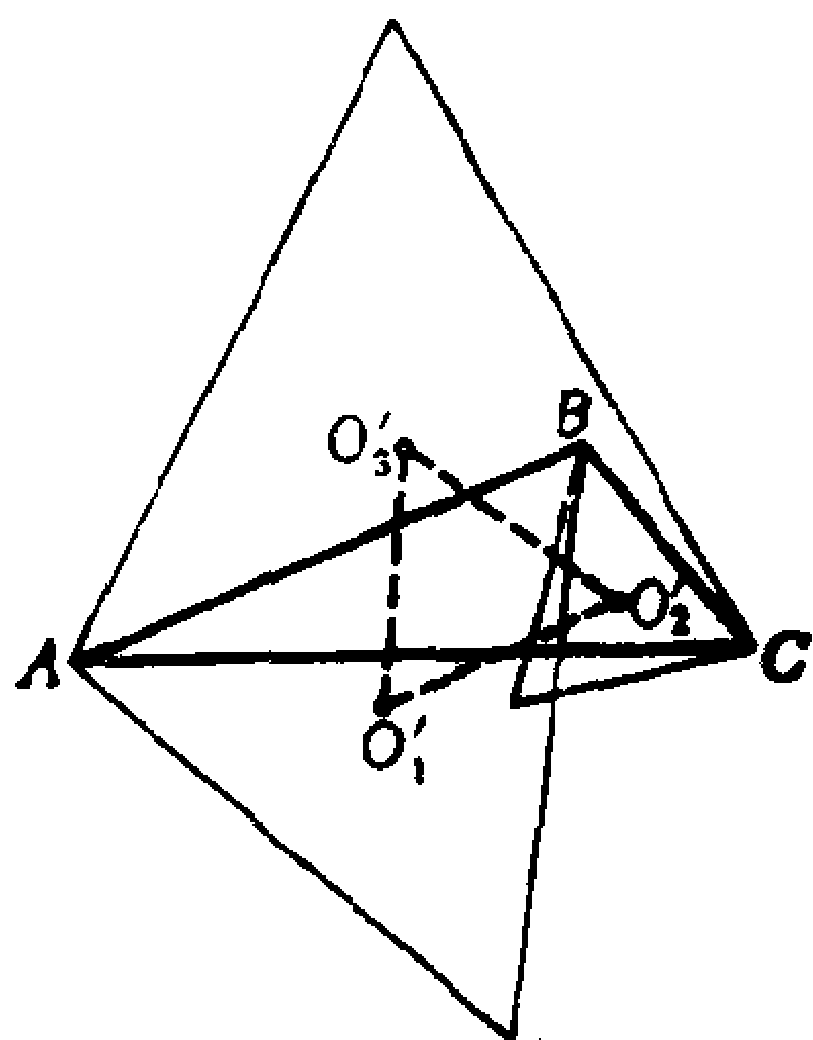


图 80

(b) 解法类似于 (a)。因为分别以 B_1, A_1 和 C_1 为中心，以 β，α 和 γ 为转角（$\alpha+\beta+\gamma=360°$）的三个旋转之和以 A 点为不动点，所以这三个旋转之和为恒同变换。于是，以 B_1, A_1 为中心，β, α 为转角的两个旋转之和（是一个旋转）的中心必定与 C_1 重合。也就是说，C_1 是分别过 B_1 和 A_1，且与直线 B_1A_1 夹角分别为 $\beta/2$ 和 $\alpha/2$ 的两条直线的交点。由此可推出本题结论。

用同样的方法可以说明，以三角形 ABC 的各边为底边，分别以 α, β, γ 为顶角，且朝三角形 ABC 内部一侧的三个等腰三角形的顶点 A'_1, B'_1, C'_1 所构成的三角形的三个角分别为 $\alpha/2, \beta/2$ 和 $\gamma/2$。

23. 依次作三个旋转，它们的转角（在同一方向上）分别为 $60°, 60°$ 和 $240°$，中心分别为 A_1, B_1 和 M，则 B 点经过这三个旋转仍变到 B 点(见正文中图32)。于是这三个旋转之和为恒同变换，因此前两个旋转之和是一个中心为 M 点的旋转。由此推出本题的结论(对照22题的解法)。

24. (a) 规定四个旋转，中心分别为 M_1, M_2, M_3 和 M_4，转角都是 $60°$，但第一、三两个旋转的方向与第二、四两个旋转的方向相反。则这四个旋转之和把四边形的顶点 A 变到

自身（见正文中图33(a)）．但是，绕 M_1 和 M_2 的两个旋转之和是一个平移，它可由线段 $M_1M'_1$ 确定，这里 M'_1 是等边三角形 $M_1M_2M'_1$ 的一个顶点（$M_2M_1=M_2M'_1$，$\angle M_1M_2M'_1=60^\circ$，且从 M_2M_1 到 $M_2M'_1$ 的旋转方向与从 M_2B 到 M_2C 的旋转方向相同，见图 81(a) 和正文中的图 28(b)）．类似地，绕 M_3 和 M_4 的两个旋转之和是由线段 $M_3M'_3$ 确定的平移，这

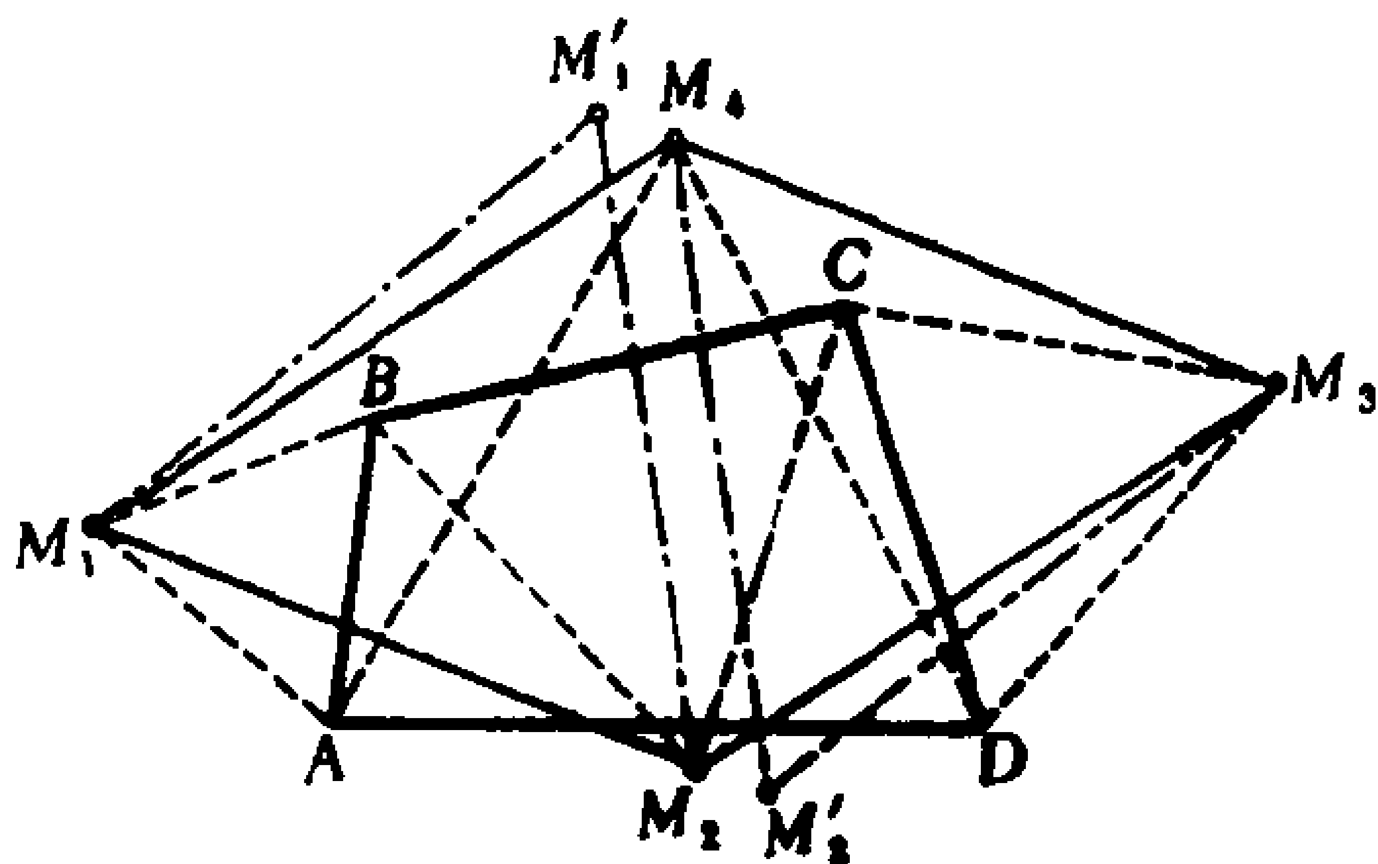


图 81(a)

里 M'_3 与 M_3,M_4 一起构成等边三角形（且从 M_4M_3 到 $M_4M'_3$ 的旋转方向与从 M_4D 到 M_4A 的旋转方向是相同的）．于是，分别由 $M_1M'_1$ 和 $M_3M'_3$ 所确定的两个平移之和把 A 点变到自己．而两个平移之和仍为一个平移，它有一个不动点，则就一定是恒等变换了．由此可见，线段 MM'_1 和 $M_3M'_3$ 一定相等、平行且方向相反．这样，在等边三角形 $M_1M_2M'_1$ 和 $M_3M_4M'_3$ 之间，满足

$$M_1M'_1=M_3M'_3,\qquad M_1M'_1\,/\!/\,M_3M'_3,$$

并且 $M_1M'_1$ 和 $M_3M'_3$ 方向相反．这时就有 M_1M_2 和 M_3M_4 相等、平行且方向相反．由此推知，四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 是一个平行四边形[见图81(a)]．

(b) 分别绕 M_1,M_2,M_3 和 M_4 转 90°，这样四个旋转之

和显然把四边形的顶点A变到自身。由此可推出，这四个旋转之和为恒同变换(对照(a)的解)。但是，绕M_1和M_2的两个旋转之和是关于某一点O_1的中心对称，这里的O_1点与M_1和M_2一起构成等腰直角三角形(因为

$$\angle O_1M_1M_2=\angle O_1M_2M_1=45^\circ;$$

对照图81(b)和正文中的图28(a))。类似地，绕M_3和M_4的两个旋转之和是关于O_2点的中心对称，O_2点与M_3和M_4一

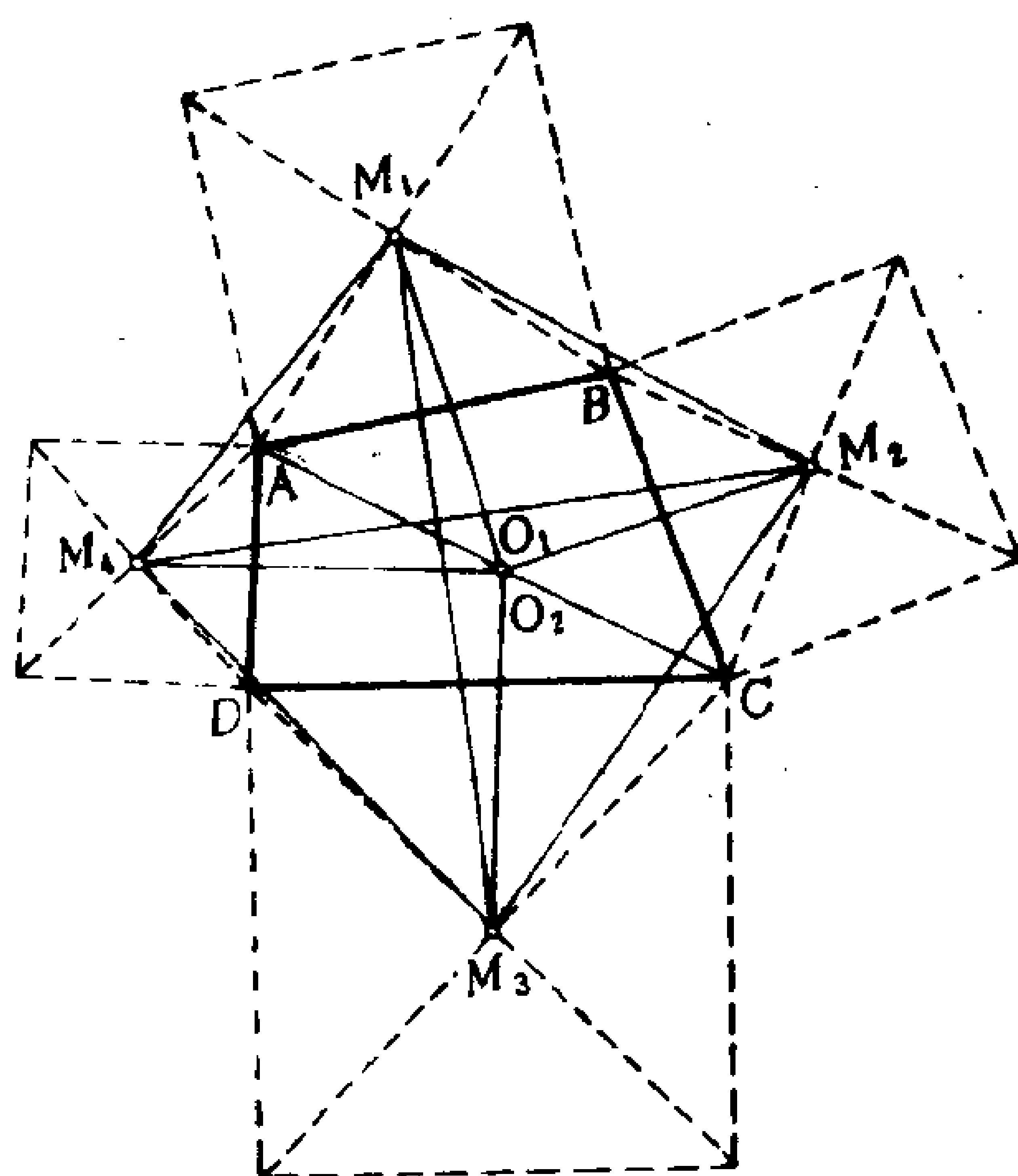


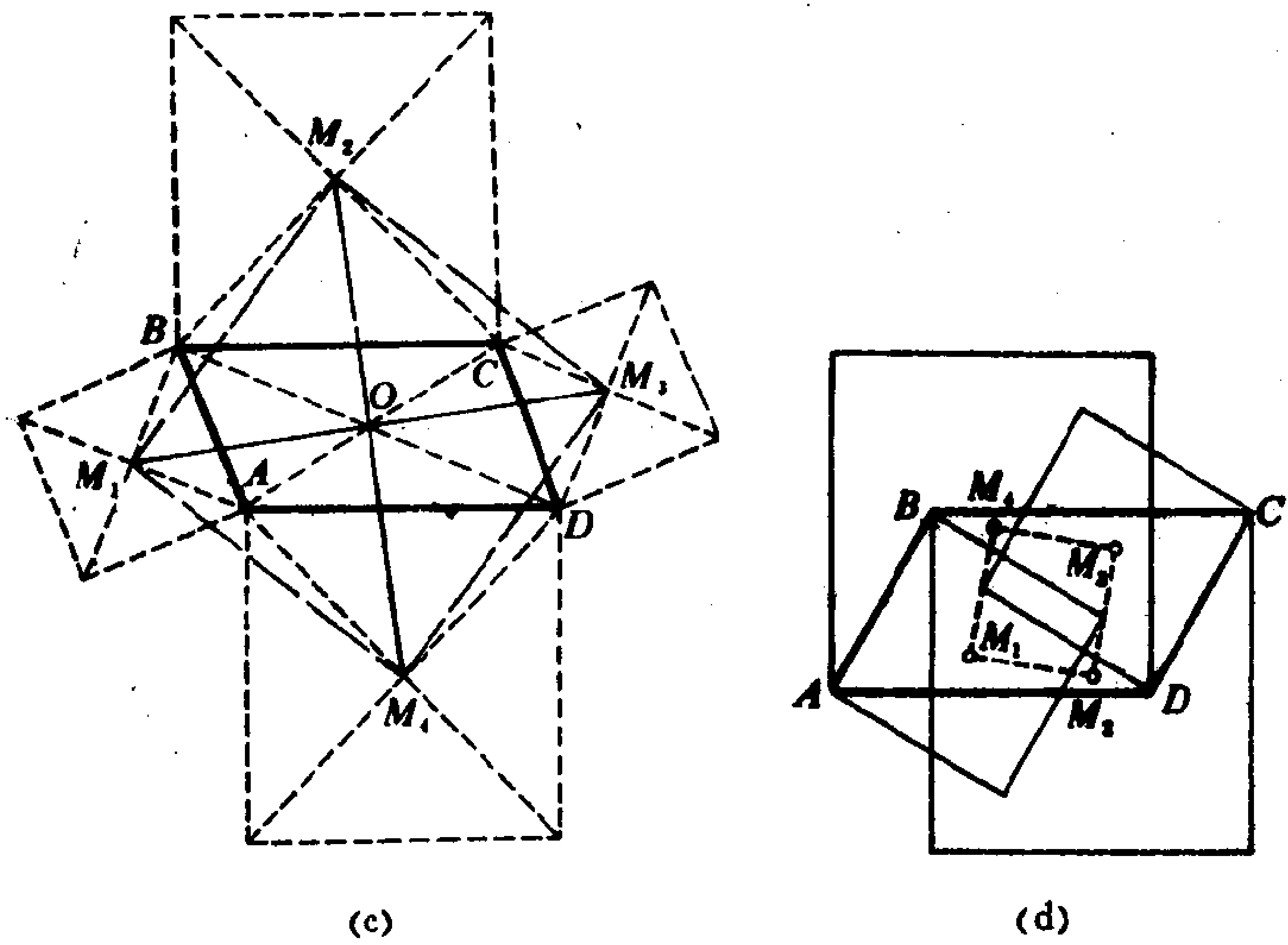
图 81(b)

起构成等腰直角三角形。由于关于O_1和O_2的中心对称之和为恒同变换，容易由此推出O_1和O_2是重合的，从而三角形$O_1M_2M_4$绕O_1(即O_2)旋转90°即得到三角形$O_1M_1M_3$。于是线段M_1M_3与M_2M_4相等且互相垂直。

(c) 根据上面已证明的事实(见(b)的解)，四边形$M_1M_2M_3M_4$的对角线M_1M_3和M_2M_4相等并且互相垂直.

另外，由于平行四边形$ABCD$的对角线的交点O是此平行四边形的对称中心，它也是整个图形81(c)的对称中心，特别地，它也是四边形$M_1M_2M_3M_4$的对称中心(因此这个四边形是平行四边形，因为具有对称中心的四边形一定是平行四边形)。而对角线互相垂直且相等的平行四边形一定是正方形。

用同样的方法可以证明，在一个平行四边形各边上向平行四边形的内部作的四个正方形的中心也构成一个正方形[图81(d)]。



(c)　　　　　　(d)

图 81

25. (a) 假设X点已找到，它满足

$$\angle AXM=\angle BXN$$

[图82(a)]。设B'点是B点在直线MN上的反射象，则

$$\angle B'XN=\angle BXN=\angle AXM,$$

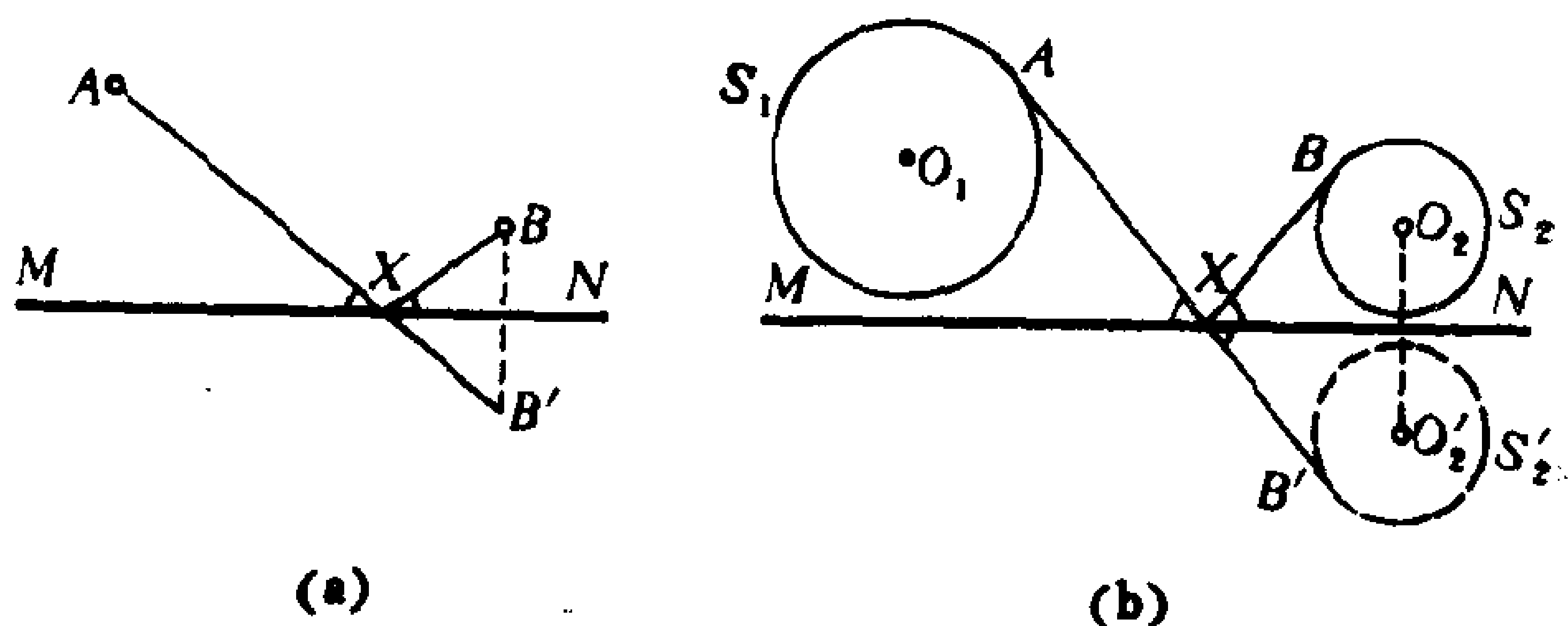
这就是说A,X,B'这三点共线。由此推出，X是直线MN和AB'的交点。

(b) 假设X点已找到。又设S'_2是圆S_2在直线MN上的反射象[图82(b)]。

如果XA,XB和XB'是从X点向圆S_1,S_2和S'_2作的切线，则

$$\angle B'XN=\angle BXN=\angle AXM,$$

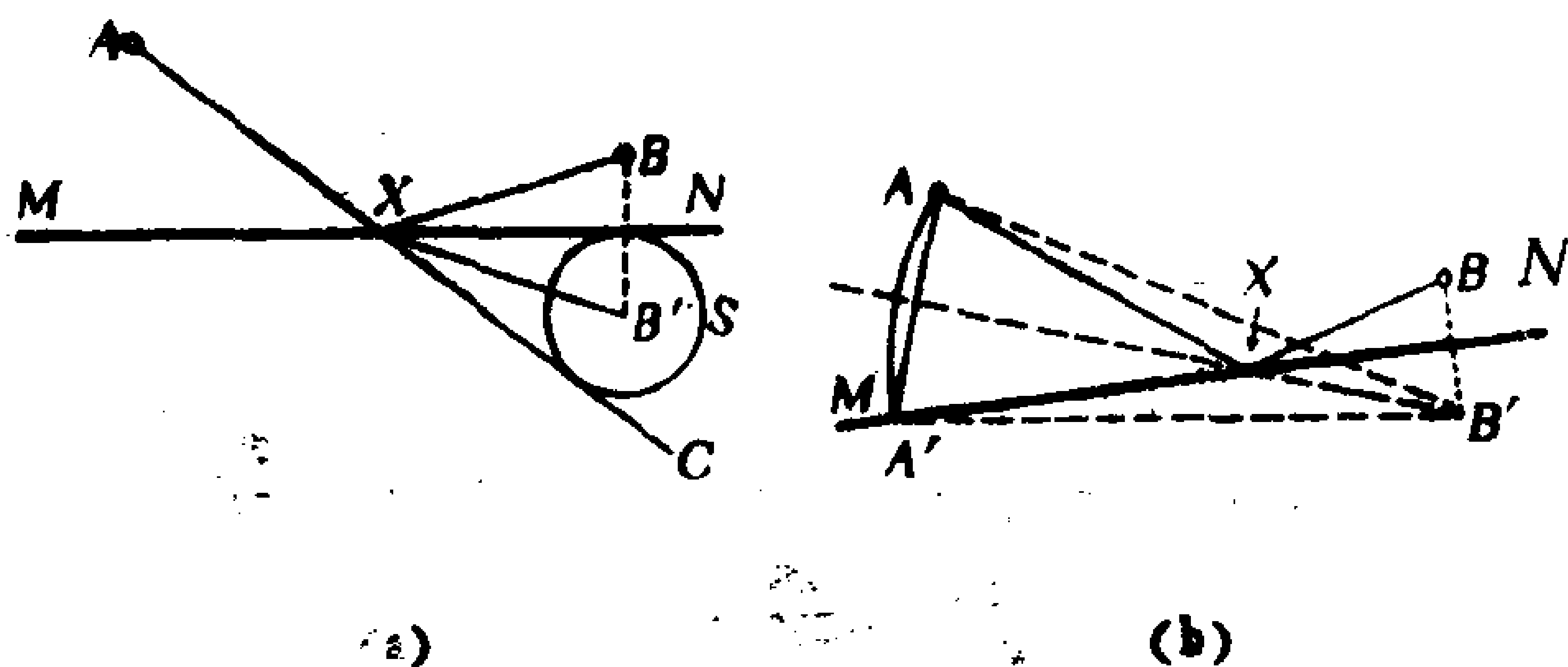
这就是说A,X和B'这三点共线。因此X是圆S_1和S'_2的公切线AB'与直线MN的交点。本题最多可能有四个解(因为两个圆最多有四条公切线)。



(a)　　　　(b)

图　82

(c) 第一个解法。假设X点已找到。又设B'点是B点在直线MN上的反射象，并设XC是线段AX在X一端的延长线[图83(a)]。则



(a)　　　　(b)

图 83

$$\angle CXN=2\angle BXN=2\angle B'XN,$$

因此射线XB'是角NXC的分角线。于是直线AXC与圆S相切，这里S是以B'为圆心，并与MN相切的圆。这样，X就是圆S的过A点的切线与直线MN的交点。

第二个解法。还是假定X点已经找到。设A'点是A点在直线$B'X$上的反射象(B'点仍是B点在直线MN上的反射象)。$B'X$平分角AXM，因此A'在直线XM上，并且$B'A=B'A'$[图83(b)]。这样，A'点就是以B'点为圆心，以$B'A$为半径的圆与MN的一个交点，从而它可求得。然后，过B'点作直线AA'的垂线，它与MN的交点就是X点。

26. (a) 假设三角形ABC已经作出，使l_2平分角B，l_3平分角C[图84(a)]。于是，直线BA和BC互为在直线l_2上的反射象，直线BC和AC互为在直线l_3上的反射象，因此A点分别在直线l_2和l_3上的反射象A'和A''都在直线BC上。

由此我们得到作图法如下：求出A点在直线l_2和l_3上

的反射象 A' 点和 A'' 点。直线 $A'A''$ 与直线 l_2, l_3 的交点就是顶点 B, C。

如果直线 [illegible] l_3 垂直，则直线 $A'A''$ 经过 l_1, l_2, l_3 的公共交点，本题就无解。如果 l_1 垂直于 l_2(或 l_3)，则 $A'A''$ 平行于 l_3(或 l_2)，本题也无解。在三条给定直线互相都不垂直的情形，本题有唯一解。然而，只有当 l_1, l_2, l_3 中每一条都包含在另两条所夹的钝角中时，l_1, l_2, l_3 才能分别是三角形 ABC 的三个内角的分角线。例如，若 l_1 包含在 l_2 和 l_3 所夹的锐角中，则 l_2 和 l_3 平分三角形的外角[图84(b)]。请读者

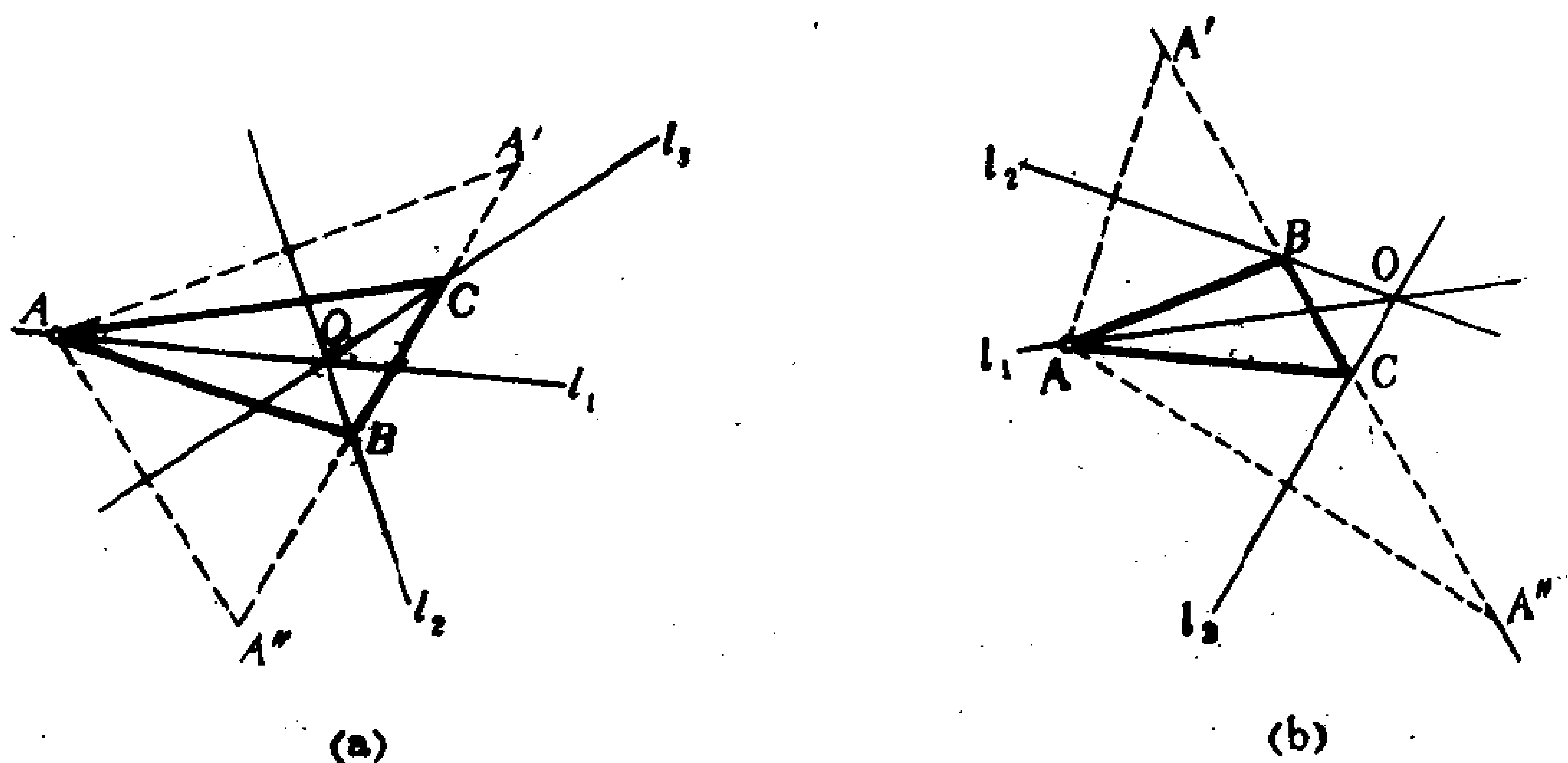


图 84

自己去证明这个结论。

(b) 在这三条直线中的一条上任取一点 A'，并作三角形 $A'B'C'$，使得直线 l_1, l_2, l_3 恰好是它的三个内角的分角线[见(a)的解]。作圆的三条切线，使它们分别平行于三角形 $A'B'C'$ 的三条边(图85)，则这三条切线所夹成的三角形就是本题的解。如果三条直线 l_1, l_2, l_3 中的每一条都包含在另外两条所夹的钝角中，则本题有唯一解。如果它们中有一条包含在另外两条所夹的锐角中，那么圆 S 将是所作三角

形的一个旁切圆，或叫外圆。

(c) 假设三角形 ABC 已作出(图86)。由于 A 点是 B 点在直线 l_2 上的反射象，直线 BC 在 l_2 上的反射象一定经过 A 点；又由于 A 点是 C 点在直线 l_3 上的反射象，直线 BC 在 l_3 上的反射象也一定经过 A 点。

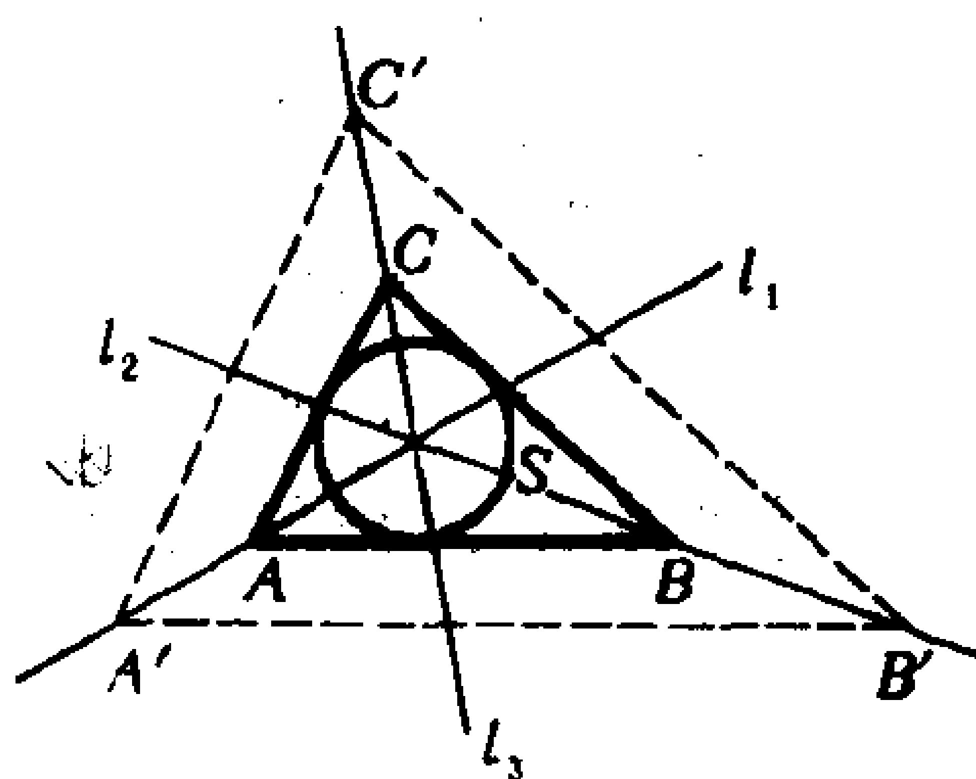


图 85

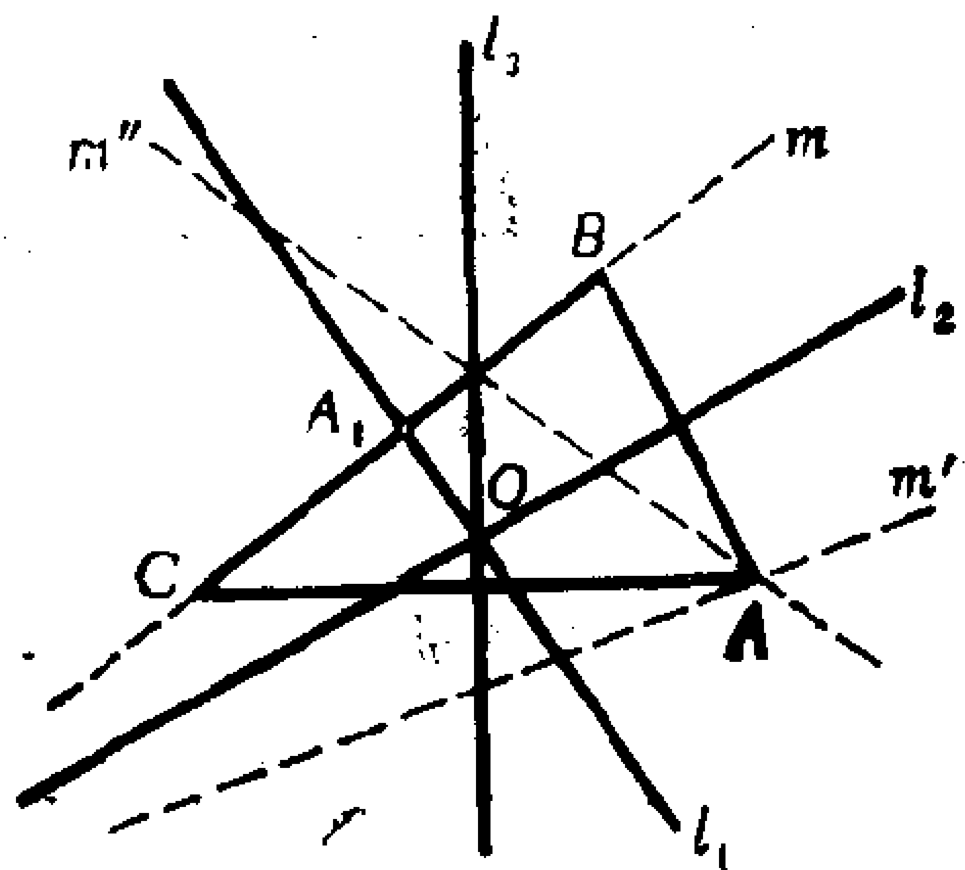


图 86

于是我们得到作图法如下：过 A_1 点作直线 m，使它垂直于 l_1，然后作直线 m 在 l_2 和 l_3 上的反射象 m' 和 m''。m' 和 m'' 的交点就是所求三角形的顶点 A，顶点 B 和 C 分别是 A 在 l_2 和 l_3 上的反射象(图86)。

如果直线 l_2 与 l_3 是垂直的，那么或者 m 在 l_2 和 l_3 上的反射象 m' 和 m'' 是平行的(当 A_1 点与三直线 l_1, l_2, l_3 的交点 O 不重合时)，或者它们是重合的(当 A_1 与 O 重合时)。在第一种情形，本题无解；在第二种情形，解不唯一。如果 l_2 与 l_3 不垂直，则解是唯一的。

27. (a) 假设本题已解出。过顶点 C 作平行于 AB 的直线 MN。设 B' 点是 B 点在 MN 上的反射象(图87)。又设此三角形的与底边 AB 相邻的两个角分别等于 α 和 β (我们设 $\alpha>\beta$)，则

$$\angle ACN = 180^\circ - \alpha, \qquad \angle B'CN = \angle BCN = \beta;$$
$$\angle ACB' = (180^\circ - \alpha) + \beta = 180^\circ - (\alpha - \beta) = 180^\circ - \gamma.$$

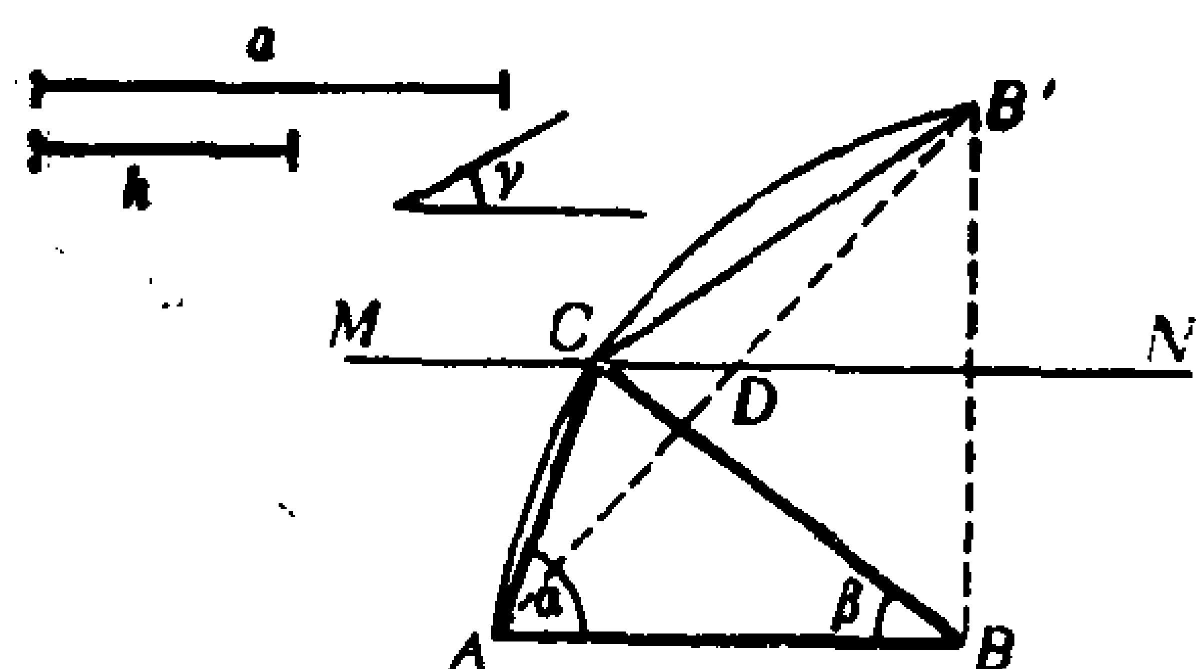


图 87

于是我们得到作图法如下：作线段 $AB = a$，作平行于 AB 的直线 MN，使它到 AB 的距离为 h。设 B' 点是 B 点在直线 MN 上的反射象。在线段 AB' 上作弧，使它所含圆周角为 $180^\circ - \gamma$。这条弧与直线 MN 的交点就是所求三角形的第三个顶点 C。本题有唯一解。

(b) 假设本题已解出。如同(a)的解法中那样作直线 MN 和 B' 点(图87)。

由于
$$\angle ACB' = 180^\circ - \gamma,$$
我们能作出三角形 ACB'(它的两边 AC 和 $CB'(=CB)$ 已知，夹角为 $180^\circ - \gamma$)。而 MN 与这个三角形的 AB' 边上的中线 CD 是重合的(因为 MN 平行于三角形 ABB' 的 AB 边，且过另一边 BB' 的中点，所以它也过 AB' 的中点 D)。于是 B 点也能找到：它是 B' 点在直线 MN 上的反射象。本题有唯一解。

28. 假设本题已解出，并设 B' 点是 B 点在直线 OM 上的反射象(图88)。我们有
$$\angle B'XA = \angle B'XB + \angle YXZ;$$
但是
$$\angle B'XB = 2\angle OXZ = 2(\angle XZY - \angle MON)$$

(因为$\angle XZY$是三角形XOZ的一个外角)。于是

$$\begin{aligned}\angle B'XA &= 2\angle XZY - 2\angle MON + \angle YXZ\\ &= \angle XZY + \angle XYZ + \angle YXZ - 2\angle MON\\ &= 180^\circ - 2\angle MON,\end{aligned}$$

因此$\angle B'XA$是已知的。于是X点可这样来找：作立在线段AB'上的弧，使它所含圆周角为$180^\circ - 2\angle MON$，此弧与射线OM的交点即X点。本题有唯一解。

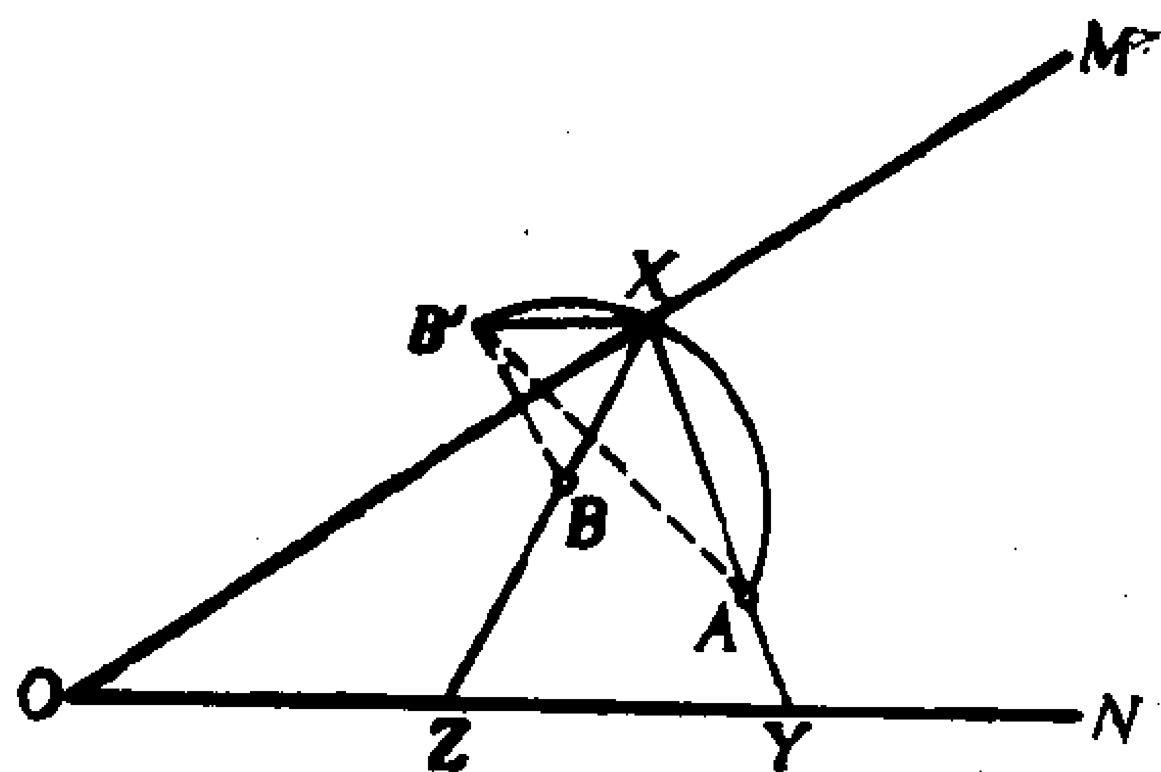


图 88

29. (a) 假设四边形$ABCD$已作出，设B'点是B点在对角线AC上的反射象(图89)。因为$\angle BAC = \angle DAC$，所以B'在直线AD上。于是三角形$B'DC$的三条边都是已知的：

$$DC,\quad B'C = BC,\quad DB' = AD - AB' = AD - AB.$$

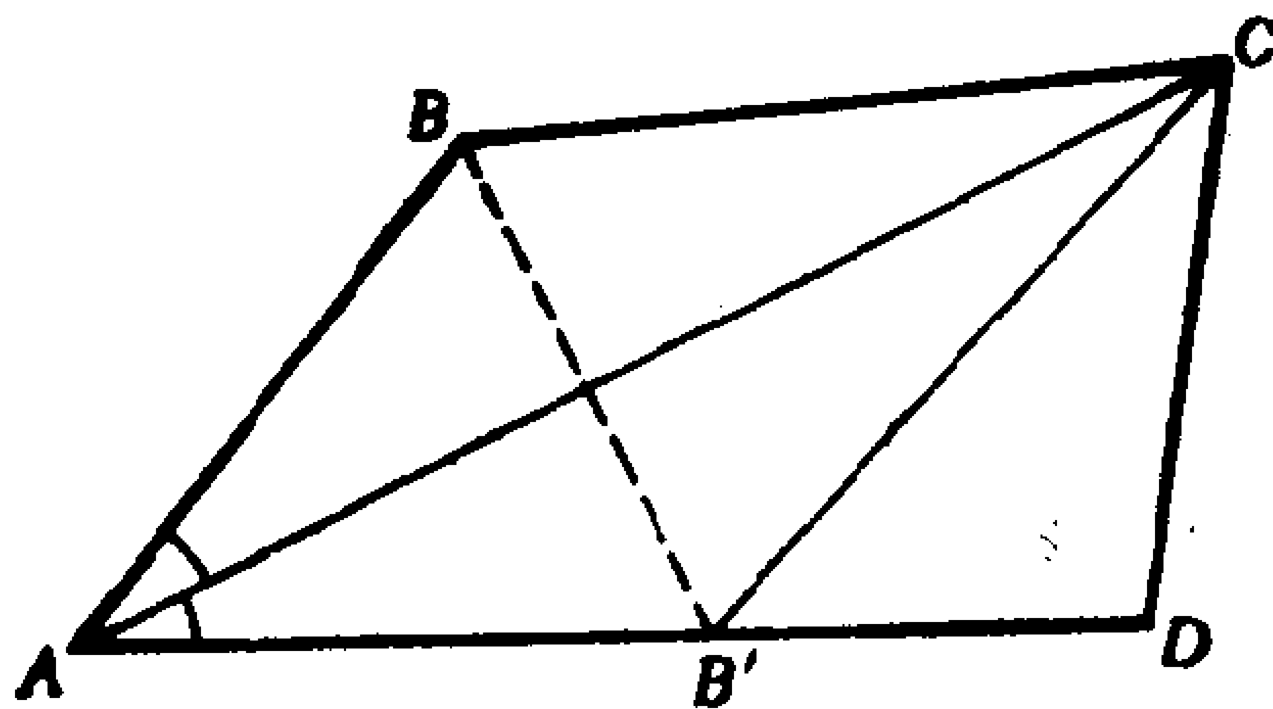


图 89

先作这个三角形，再找出A点(利用AD已知)，然后求B'点在直线AC上的反射象，它就是顶点B。如果$AD \neq AB$，

则本题有唯一解；如果 $AD=AB$，而 $CD\neq CB$，则本题无解；如果 $AD=AB$，且 $CD=CB$，则本题有不止一个解。

(b) 假设本题已解出(图90)。设三角形 AD_1C_1 是三角形 ADC 在直线 AO 上的反射象(O 点是这四边形的内切圆的圆心)。显然 D_1 点在直线 AB 上，且 D_1C_1 边与四边形 $ABCD$ 的内切圆相切。

图 90

由此我们得到作图法如下：任取一条直线，在其上作线段 AB 和 $AD_1=AD$。此处由于知 $\angle ABC$ 和 $\angle AD_1C_1$ 等于 $\angle ADC$，故能作直线 BC 和 D_1C_1(虽然我们还不知道 C 点和 C_1 点的位置)。于是，我们就能作出内切圆了，因为它与直线 AB，BC 和 D_1C_1 都相切。然后，作线段 AD_1 和直线 D_1C_1 在直线 AO 上的反射象，就得到四边形的边 AD 和直线 DC，直线 BC 与 DC 的交点就是顶点 C。

如果 $\angle ADC\neq\angle ABC$，则本题有唯一解；如果 $\angle ABC=\angle ADC$，而 $AB\neq AD$，则本题无解；如果 $\angle ABC=\angle ADC$ 且 $AB=AD$，则本题有不止一个解。

30. (a) 假设本题已解出，也就是说在直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上已找到点 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，使得

$$AX_1X_2\cdots X_nB$$

是台球所走的路线(图91中表示了 $n=3$ 的情形)。设 B_n 是 B 点在直线 l_n 上的反射象，则容易看出 X_n 点是直线 l_n 与

直线 $X_{n-1}B_n$ 的交点[看25题(a)的解]，也就是说 B_n, X_n, X_{n-1} 三点共线。同样，若设 B_{n-1} 是 B_n 在直线 l_{n-1} 上的反射象，B_{n-2}是B_{n-1} 在直线 l_{n-2} 上的反射象…，则 X_{n-1}是直线 l_{n-1} 与直线$X_{n-2}B_{n-1}$ 的交点，X_{n-2} 是l_{n-2}与直线 $X_{n-3}B_{n-2}$ 的交点……。

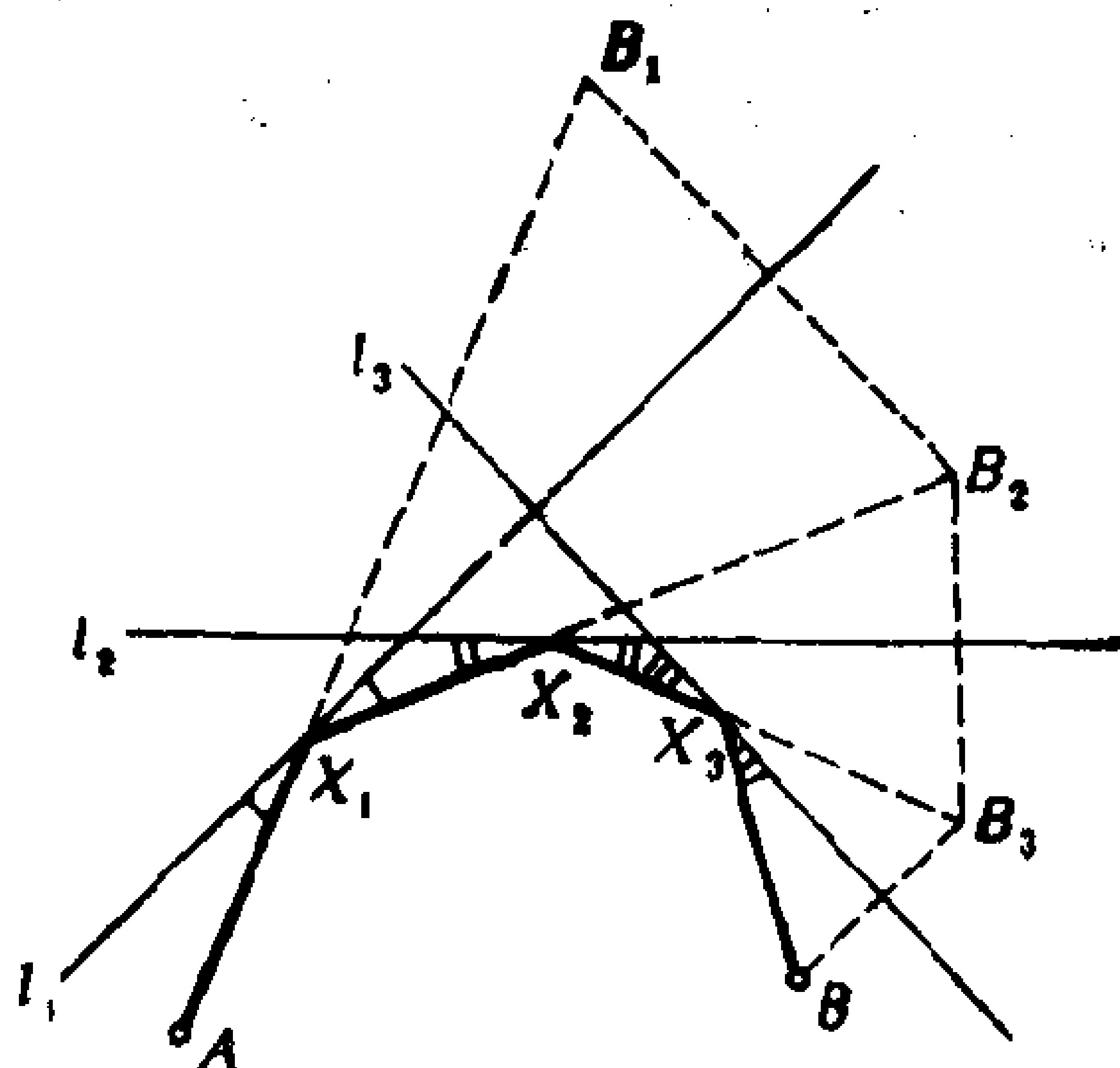


图 91

这样我们就有下面的作图法：在 l_n 上反射 B 点得B_n点，又在 l_{n-1} 上反射B_n点得 B_{n-1}点，如此作下去，最后在 l_1 上反射 B_2 点得到 B_1 点。于是，直线 l_1和直线 AB_1 的交点就是 X_1 点，而它决定了在A点处的台球被击出时应有的方向。利用 X_1 和 $B_2, B_3, \cdots, B_n$ 容易找到点 $X_2, X_3, \cdots, X_n$。

(b)① 按照 (a) 的解法中所用方法，我们先求出A点在l_4上的反射象 A_4，然后求出 A_4在 l_3 上的反射象 A_3，再求出 A_3 在 l_2 上的反射象 A_2，最后求出 A_2 在 l_1 上的反射象A_1(见图92)。容易证明，相继作在 l_4 上的反射和在 l_3 上的反射等价于一个关于 l_3 与 l_4 的交点R的中心对称②。同样地，在l_2和 l_1 上的反射之和是关于P点的中心对称。于是，四个反射之和等同于关于R点与P点的两个中心对称之和。但是我们知道(参看图 17)，这样两个中心对称之和等于在 RP 方向

① 这个解法不是原著中的解法，是英译者给出的。

② 见48页。——英译者

上、距离为 $2RP$ 的一个平移。

这样，线段 AA_1 平行于对角线 RP 并且等于 RP 的两倍。再通过对夹角的考虑，我们容易看出：A 点所走的路径 $AX_1X_2X_3X_4A$ 是一个平行四边形（对边平行），它的边分别平行于两条对角线。因此，如果台球回到 A 点时仍不停止，就将按原来的路径再走第二次。

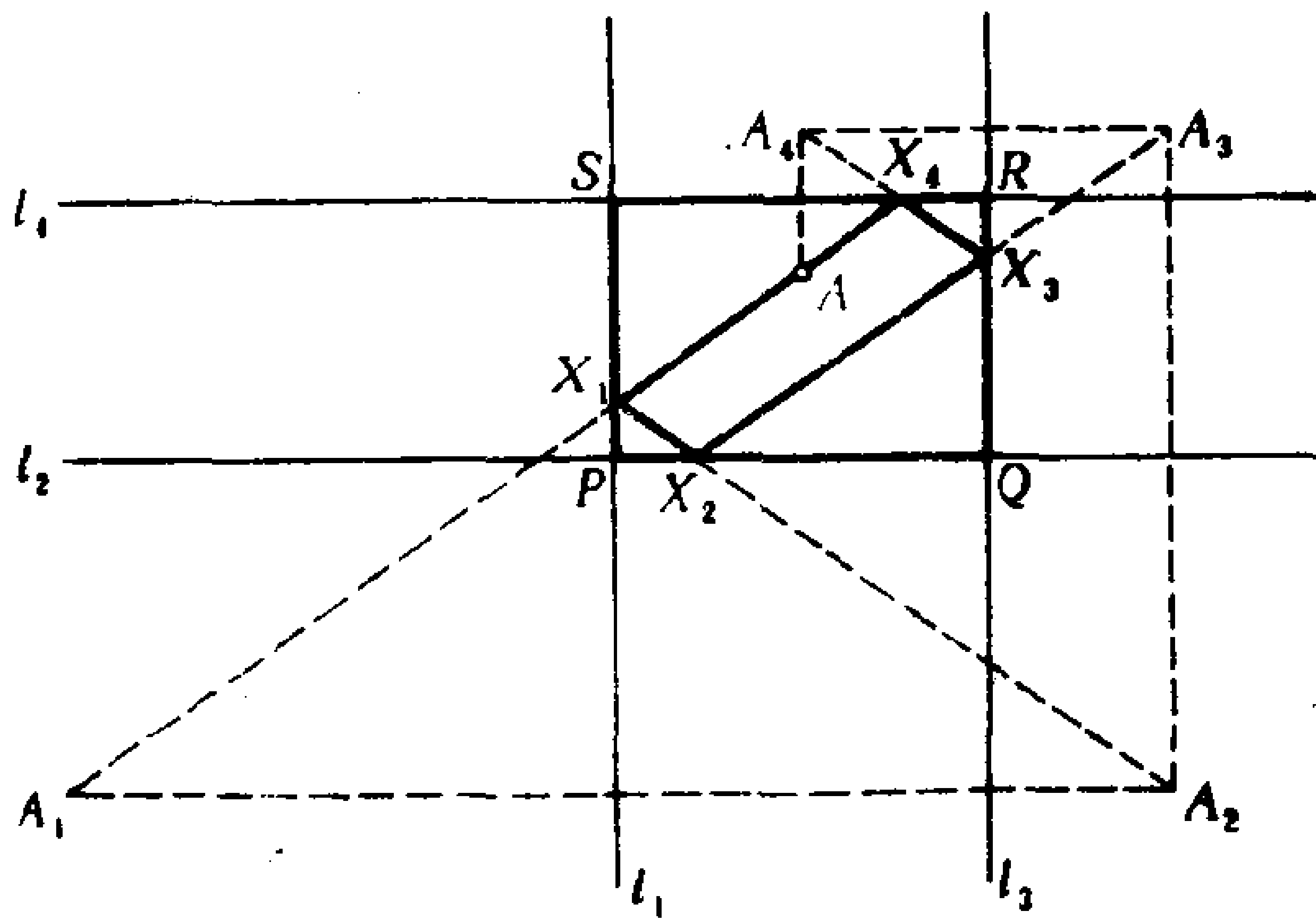
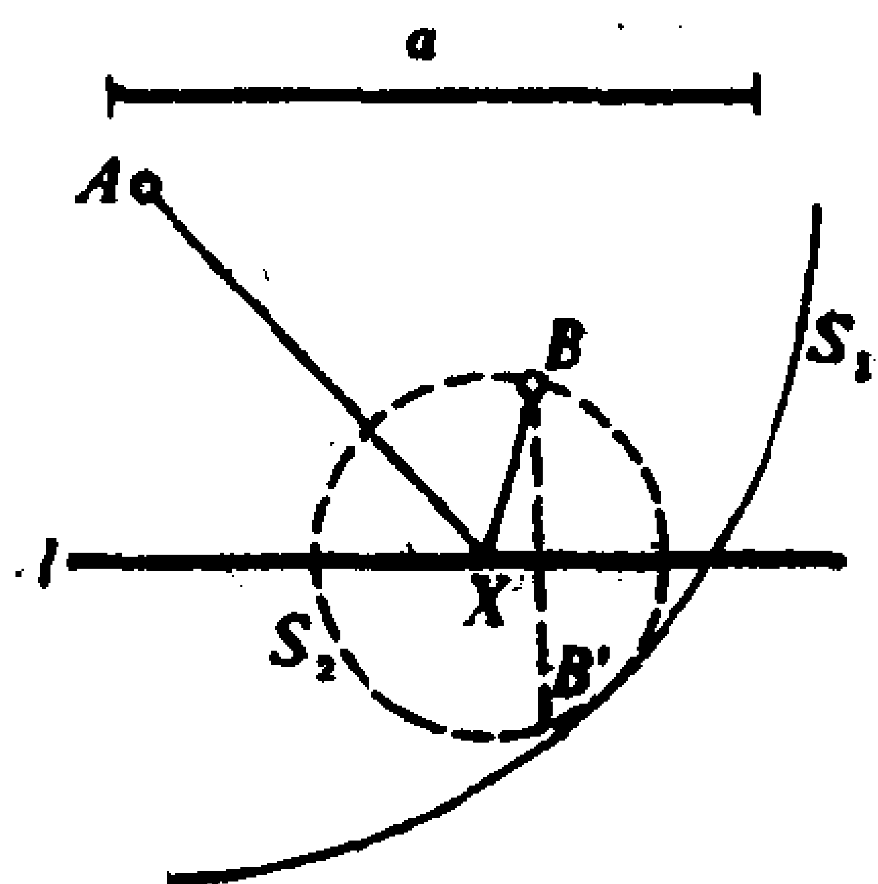


图 92

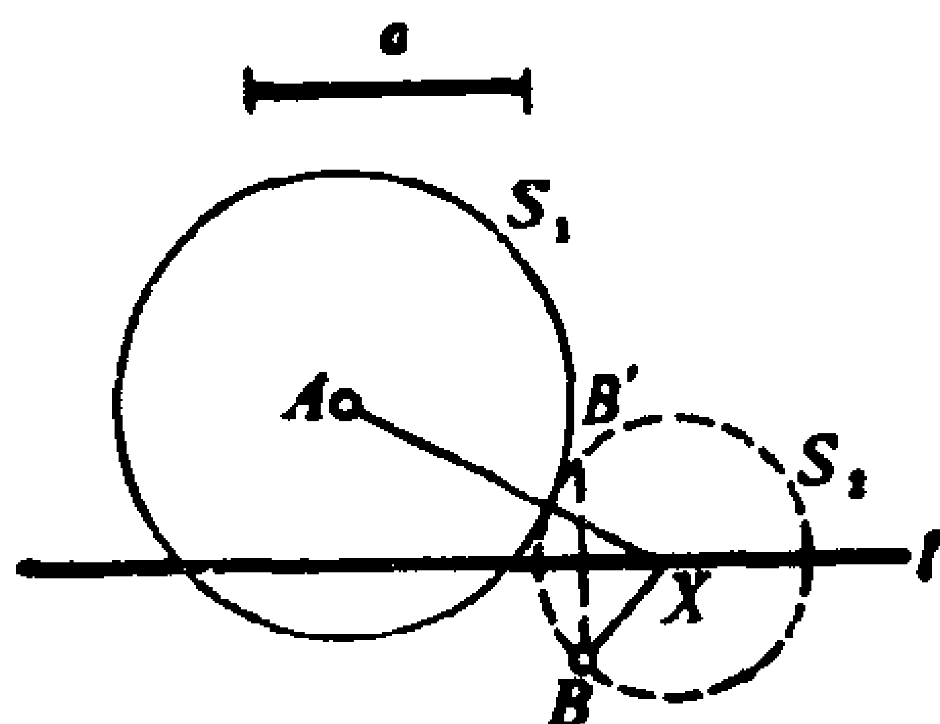
最后，从图中可看出，上述道路的长度等于 AA_1，也就是一条对角线长度的两倍。

31.（a）假设本题已解出。以 A 点为圆心，a 为半径作圆 S_1，又以 X 点为圆心，XB 为半径作圆 S_2[图 93(a)]。显然这两个圆相切，且切点在直线 AX 上。由于圆 S_2 过 B 点，它也一定过 B 点在 l 上的反射象 B' 点。于是，本题就化归下面的问题：过两个已知点 B 和 B'，求作一圆 S_2，使它与给定圆 S_1 相切。这就是第二册的13题(b)。圆 S_2 的中心 X 就是所求点。本题最多有两个解，也可能只有一个解，或者无解。

(b) 假设本题已解出，并设 S_1 是以 A 点为圆心，a 为半径的圆，S_2 是以 X 点为圆心，BX 为半径的圆[图93(b)]。则这两个圆相切于直线 AX 上的一点。又 S_2 一定经过 B 点在 l 上的反射象 B' 点。因此本题也可化归第二册13题(b)。本题最多有两个解。



(a)



(b)

图 93

32. (a) 设 H_1 是 H 在 BC 上的反射象，P, Q, R 为三条高的垂足(图94)。则我们有

$$\angle BH_1C = \angle BHC$$

(因为 $\triangle BH_1C \cong \triangle BHC$)。但是

$$\angle BHC = \angle RHQ,$$

而

$$\angle RHQ + \angle RAQ = 180°,$$

因此

$$\angle BH_1C + \angle BAC = 180°.$$

由此可推出 H_1 在三角形 ABC 的外接圆上。同样可证，H 在 AB 和 AC 上的反射象也在外接圆上。

(b) 我们先假设三角形 ABC 已作出。则 H_1, H_2, H_3 都

在它的外接圆上[见(a)]。由于

$$\angle BRC = \angle BQC(=90^\circ)$$

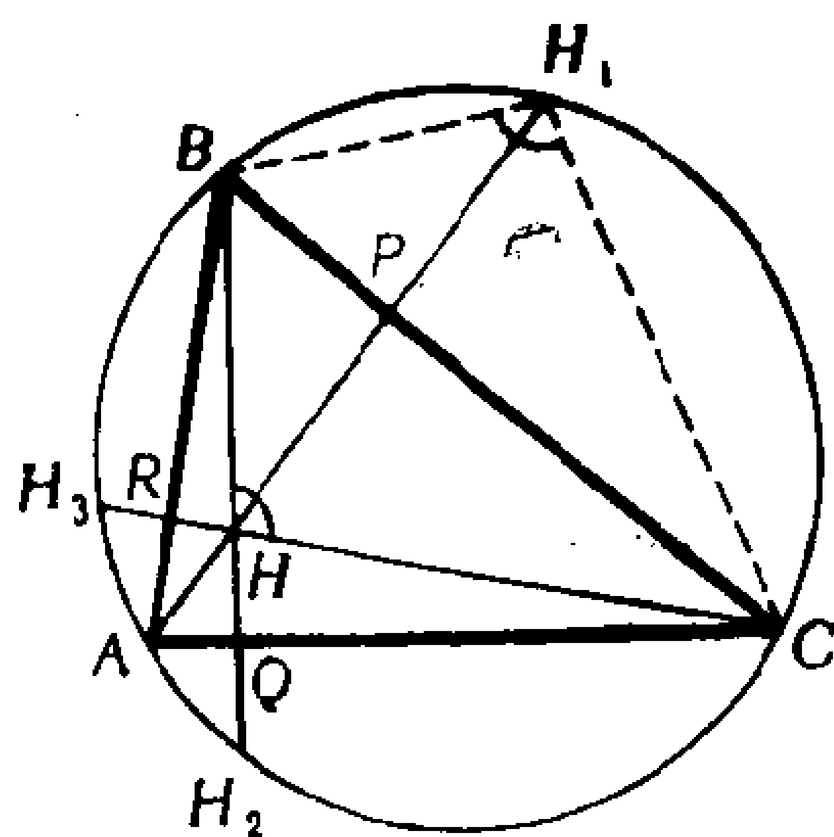


图 94

而且$\angle BHR = \angle CHQ$，可以推出

$$\angle RBH = \angle QCH,$$

因此弧 AH_3 与AH_2 相等。类似地可说明，弧 BH_1 与 BH_3 相等，弧 CH_1 与 CH_2 相等．由此可知，三角形的三个顶点 A,B,C 分别是弧 H_2H_3,H_3H_1,H_1H_2(过H_1，H_2,H_3 的圆上的弧)的中点。如果 H_1,H_2,H_3 不共线，本题有唯一解；共线时本题无解。

33。(a) 以三角形 $A_2A_3A_4$ 为例。显然有

$$A_1A_4 \perp A_2A_3, \quad A_1A_3 \perp A_2A_4, \quad A_1A_2 \perp A_3A_4,$$

即 A_1A_4,A_1A_3,A_1A_2 是它的三条高，它们交于 A_1 点。

(b) 设 A_4' 是 A_4 在直线 A_2A_3 上的反射象(图95)．则 A_4' 在三角形 $A_1A_2A_3$ 的外接圆 S_4 上[参见32题(a)]。因此，三角形 $A_2A_3A_4'$ 的外接圆也就是 S_4。由此推出，三角形 $A_2A_3A_4$ 的外接圆 S_1 与 S_4 是全等的(S_1 与 S_4 互为在直线 A_2A_3 上的反射象)，用类似的方法可以说明，圆 S_2 和 S_3 也都与 S_4 全等。

(c) 首先我们注意，三角形 $A_1A_2A_3,A_1A_2A_4,A_1A_3A_4$，$A_2A_3A_4$ 中至少有一个为锐角三角形①．事实上，如果三角形 $A_2A_3A_4$ 在 A_4 处的角为钝角，那么 $A_2A_3A_1$ 是锐角三角形(A_1 是三角形 $A_2A_3A_4$ 的垂心)．我们不妨假设 $A_1A_2A_3$是锐

---

① 恰好有一个是锐角三角形。——中译者

角三角形，从而 A_4 在它的内部。

考察四边形 $A_1A_4O_1O_4$，这里 O_1 点和 O_4 点分别是 S_1 和 S_4的圆心，因为 S_1 和 S_4 互为在直线 A_2A_3 上的反射象[参见图95和(b)的解法]，所以 O_1 和 O_4 也互为在直线 A_2A_3 上的反射象，从而 $O_1O_4 \perp A_2A_3$。在四边形 $A_1A_4O_1O_4$ 中，我们就有

$$O_4O_1 /\!/ A_1A_4 \quad \text{和} \quad O_1A_4 = O_4A_1 = R$$

(这里 R 是圆 S_1, S_2, S_3, S_4 的半径)。于是，这个四边形或是平行四边形，或是等腰梯形。但是 O_4O_1 边的垂直平分线 A_2A_3 与线段 A_1A_4 并不相交，因此它不可能是等腰梯形。这就推出 $A_1A_4O_1O_4$ 是一个平行四边形，它的对角线 A_1O_1 和 A_4O_4 的交点 O 是它们的中点。用同样方法可证，O 点还是

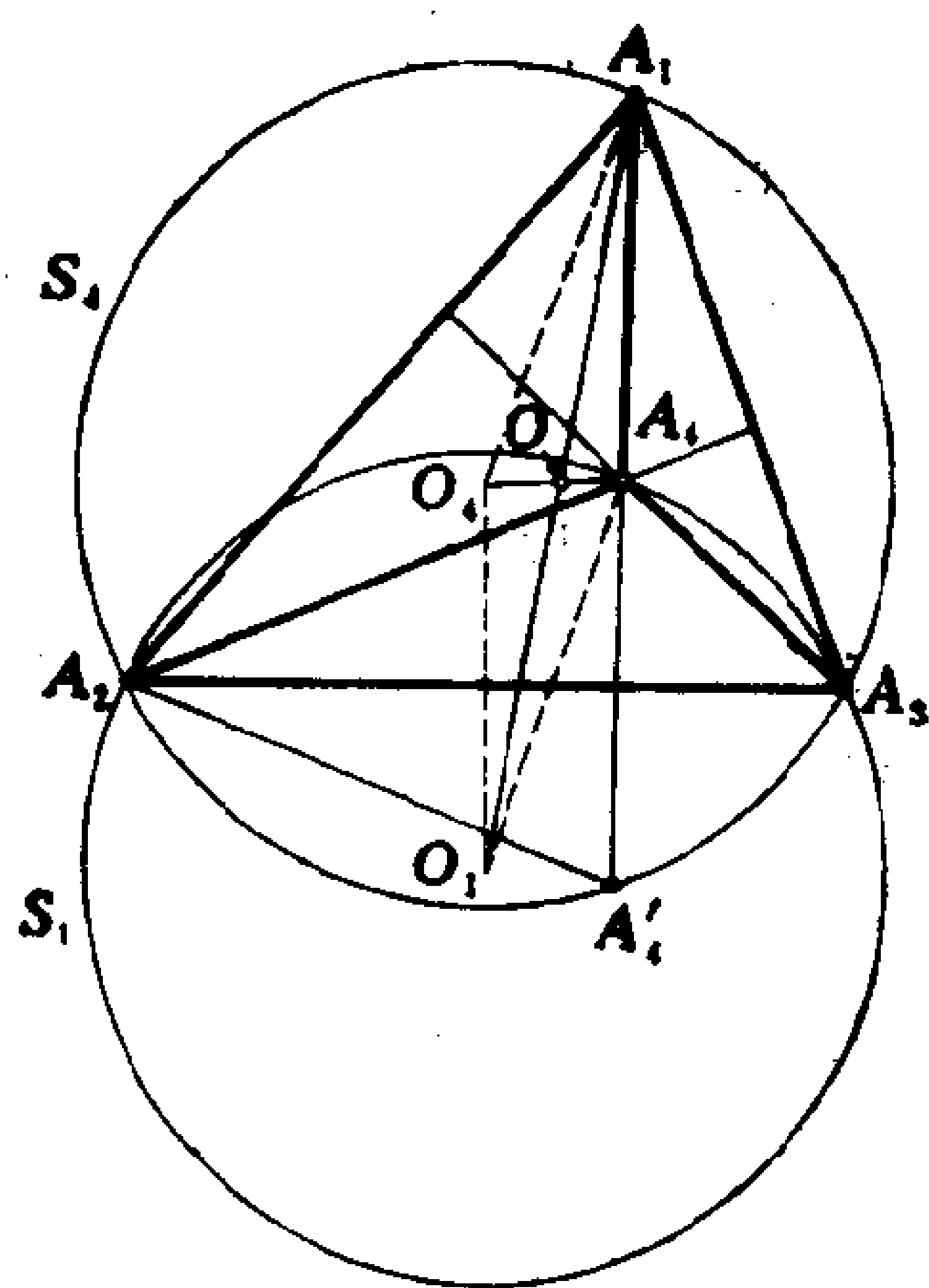


图 95

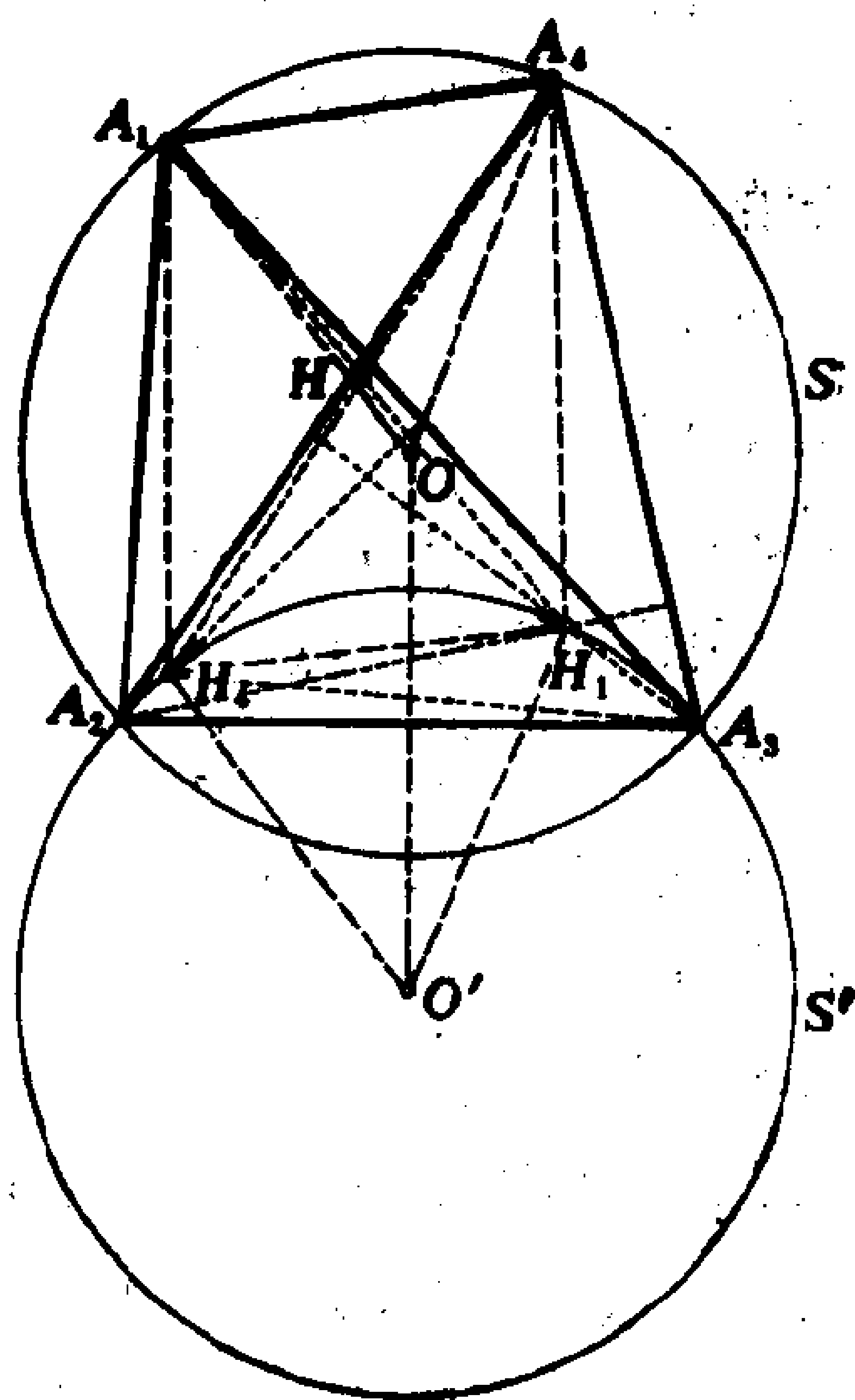


图 96

线段 A_2O_2 和 A_3O_3 的中点。

34. (a) 设 O' 点是圆 S 的圆心 O 点在直线 A_2A_3 上的反射象（图96）。则四边形 $OO'H_4A_1$ 和 $OO'H_1A_4$ 都是平行四边形[参见33题(c)的解]。因此

$$A_1H_4 = OO' = A_4H_1, \qquad A_1H_4 /\!/ OO' /\!/ A_4H_1,$$

从而 $A_1H_4H_1A_4$ 是一个平行四边形。由此推出，线段 A_1H_1 和 A_4H_4 有同一个中点 H。类似地可以证明，H 点也是线段 A_2H_2 和 A_3H_3 的中点。

(b) 以 A_2, A_3, H_1 和 H_4 这四点为例。对照图96和图95，我们可看到：H_4 在圆 S' 上，这里 S' 是圆 S 在直线 A_2A_3 上的反射象，H_1 也在 S' 上。这样 A_2, A_3, H_1 和 H_4 都在圆 S' 上，而 S' 与 S 是全等的。对其它各点组可类似地证明。

35. 首先，多边形 M 的任何两条对称轴 AB 和 CD 的交点一定在 M 的内部，因为否则它们就不可能都把图形分成相等的两部分[图97(a)]。现在我们来说明：如果还存在第三条对称轴 EF，则它也一定通过 AB 与 CD 的交点。假定不是这样，那么 AB, CD, EF 这三条对称轴将夹出一个三角形 PQR[图97(b)]。取这三角形的一个内点 M。容易看出，对于平面上任何一点，在这三条对称轴中至少有一条使得此点与 M 点在它的同一侧。在多边形的诸顶点中选取一点，使它到 M 点的距离最大（如果这样的顶点不止一个，就任选一个），记作 T。不妨设 T 和 M 在对称轴 AB 的同侧。设 T_1 是 T 在 AB 上的反射象（T_1 也一定是多边形的顶点），那么必定有 $MT_1 > MT$（因为 MT_1 在 TT_1 上的投影大于 MT 在 TT_1 上的投影，见图97(b)）。产生矛盾。论证完毕。

（用类似的方法可以说明，任何有界图形（不必为多边形）若有几条对称轴，则它们必定交于一点。但是，对于无界的

图形就不对了。例如，由两条平行直线l_1和l_2所夹的带子有无穷多条对称轴，它们互相平行，都垂直于直线l_1和l_2)。

注：本题的结论从力学上来考虑是明显的。一个厚薄均匀的多边形的物体如果有对称轴，那么它的重心就一定在对称轴上。这样，如果它有几条对称轴，则它们一定都经过重心。

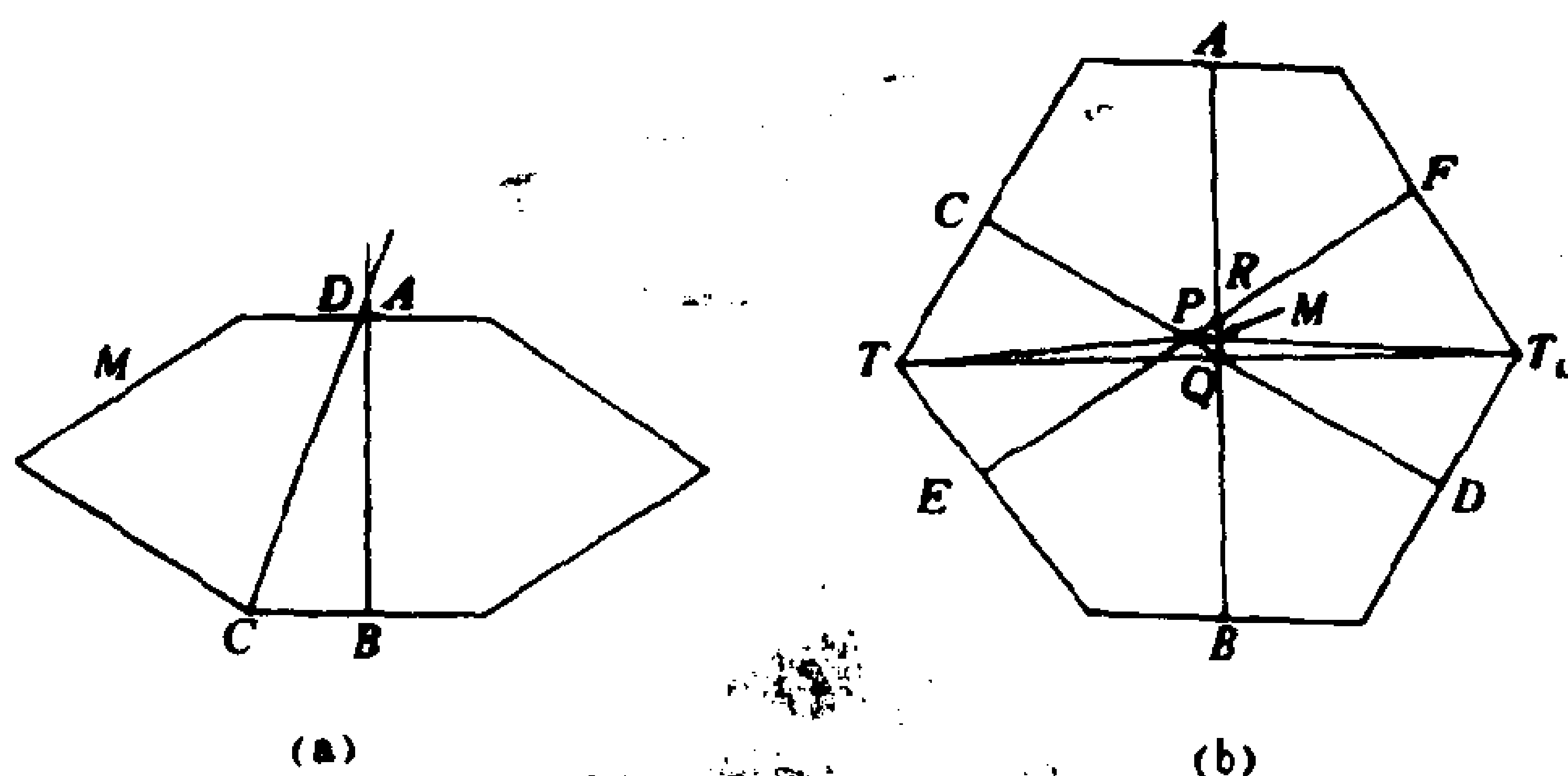


图 97

36．因为线段XY长度为定值a，所以我们只要取XY，使$AX+BY$达到最小。假设XY已找到。一个轴为l，距离为a的滑动反射将B点变到B'点，将Y点变到X点(图98)，因此$BY=B'X$，从而

$$AX+BY=AX+B'X.$$

于是，本题的要求就是让折线AXB'的长度达到最小。由此可知，X是AB'与l的交点。

37．(a) 假设四边形$ABCD$已作出。设以直线DC为轴，DC长度为距离的滑动反射把A点变到A'点(图99)，则

$$\angle A'CD=\angle ADK$$

(DK是CD边的在D一方的延长线)，因为如果设A_1点是

A 点在直线 l 上的反射象，则

$$\angle A'CD=\angle A_1DK=\angle ADK.$$

但是

$$\angle ADK=180°-\angle D=180°-\angle C,$$

因此$\angle A'CD=180°-\angle C$，也就是说 $A'CB$ 是直线。于是

$$A'B=A'C+CB=AD+CB$$

是已知的；又 A 点到 CD 的距离 d 也是已知的。

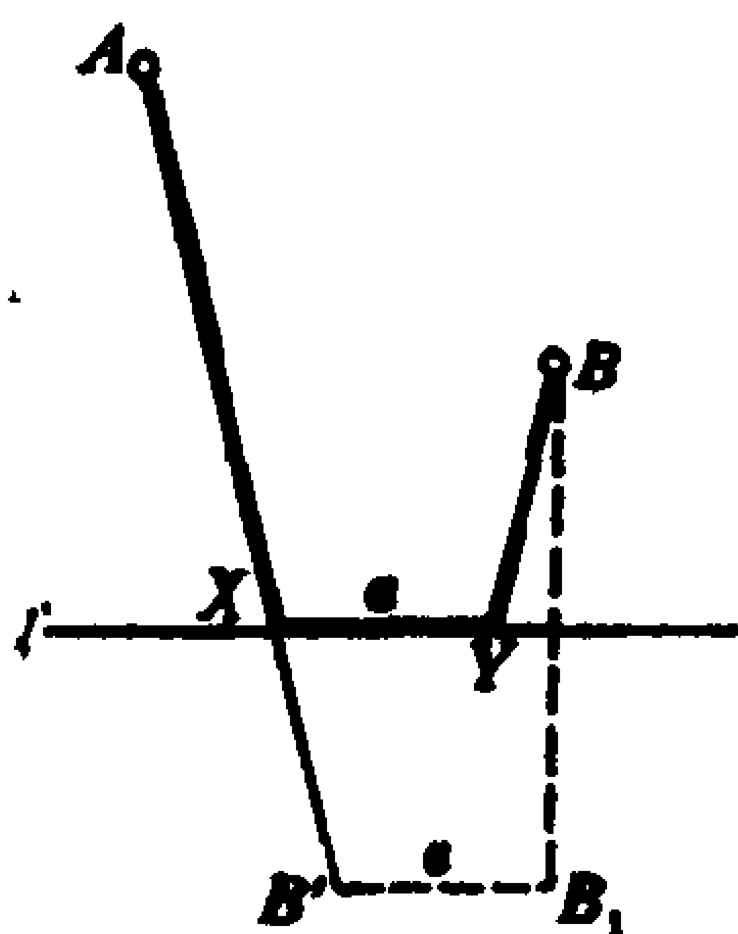


图 98

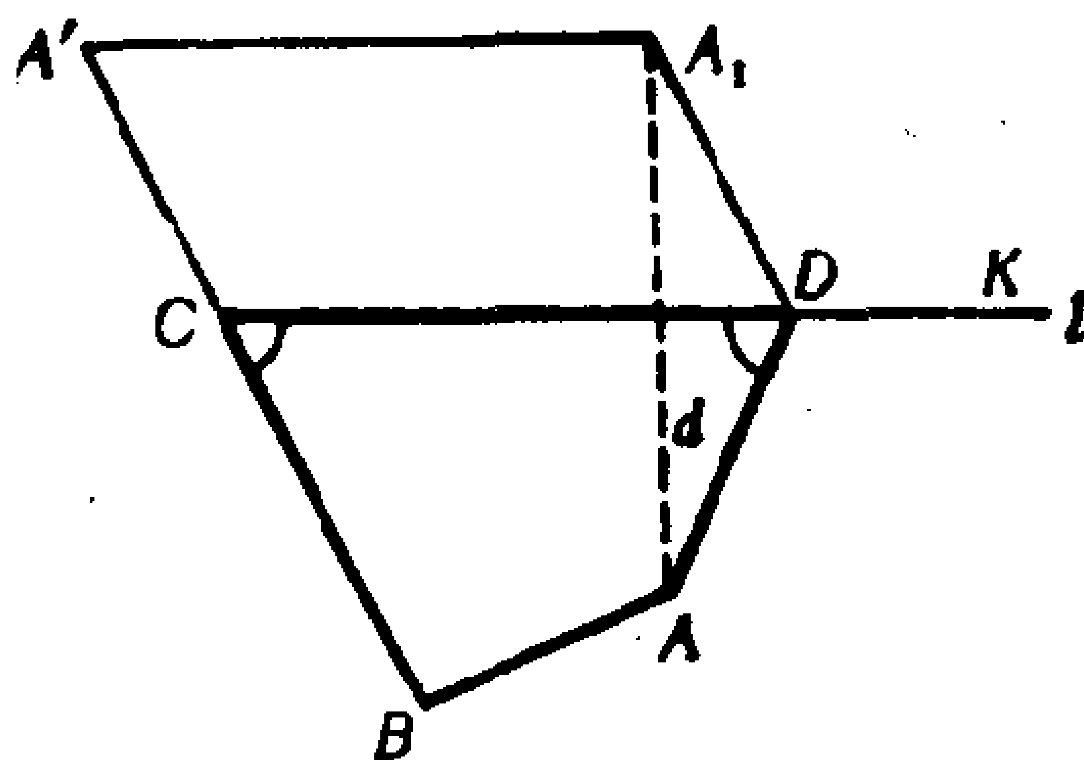


图 99

这样，我们得到作图法如下：

任作一条直线 l，并取一点 A，使它到 l 的距离等于 d。设以 l 为轴，CD 为距离的滑动反射把 A 点变到 A' 点。于是 B 点到 A 点的距离 AB 和 B 点到 A' 点的距离

$$A'B=AD+BC$$

都已知，因此 B 点可作出。而顶点 C 是线段 $A'B$ 与直线 l 的交点；D 点在 l 上，并且距离 CD 已知，因此也可找到。本题可能有两个解，一个解或无解。

(b) 作线段 AB。分别以 A 点和 B 点为圆心，d_1 和 d_2 为半径作两个圆；作它们的公切线 l（图100）。我们只用再在

l 上作线段 DC，使 $AD+BC$ 恰为给定的值[参见31题的(a)]。

假设 D 点和 C 点已经找到。设在直线 l 的方向上，距离为 DC 的平移把 A 点变到 A' 点，A'' 点又是 A' 点在 l 上的反射象。显然，圆心为 C 点，半径为 AD 的圆经过 A' 点和 A'' 点($A'C=A''C=AD$)，并且它与圆心为 B 点，半径为

$$BC+CA''=BC+AD$$

的圆 S 相切。而圆 S 是可由已知条件作出。这样，只须再作一个圆，使它过 A' 点和 A'' 点，并与 S 相切[见第二册13题(b)]，它的圆心就是 C 点。

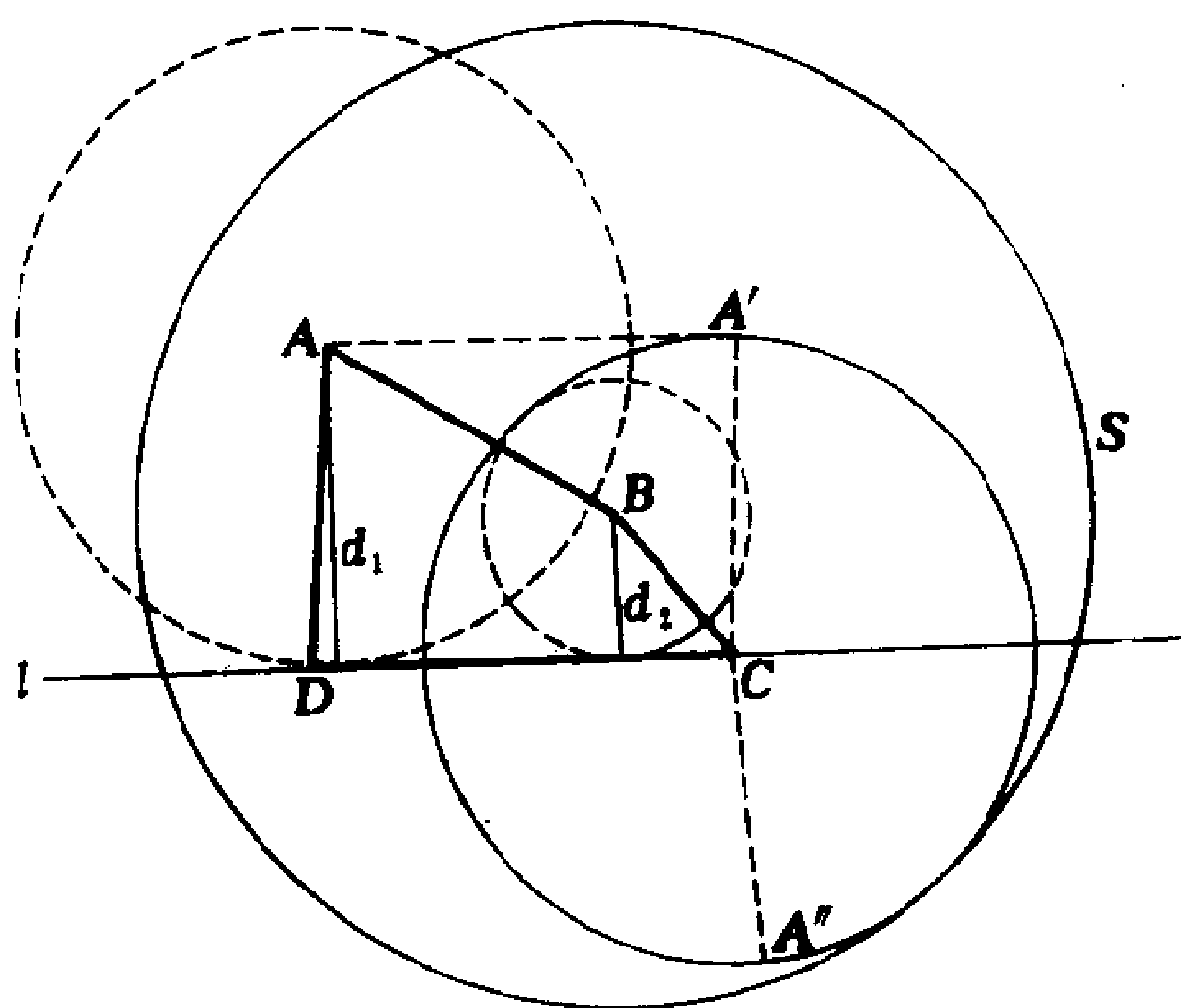


图 100

38. 第一个解法。很明显，在一光线射向一个镜面时，只有当入射线垂直于镜面的时候，反射线才会恰好与入射线反向。下面我们假定光线不是垂直地射向角的一条边。首先，我们考虑下面的情形：光线 MN 在角 ABC 的边上反射两次后，沿着与 MN 方向相反的路线 PQ 反射出去[图101(a)]。

这时，我们有

$$\angle PNB+\angle NPB=180^\circ-\angle NBP=180^\circ-\alpha;$$

$$\begin{aligned}2(180^\circ-\alpha)&=2\angle PNB+2\angle NPB\\&=\angle ANM+\angle PNB+\angle NPB+\angle CPQ\\&=180^\circ-\angle MNP+180^\circ-\angle NPQ\\&=360^\circ-(\angle MNP+\angle NPQ).\end{aligned}$$

因为射线 MN 和 PQ 平行，且方向相反，所以

$$\angle MNP+\angle NPQ=180^\circ.$$

于是

$$2(180^\circ-\alpha)=360^\circ-180^\circ，而\alpha=90^\circ.$$

反过来，如果 $\alpha=90^\circ$，则$\angle MNP+\angle QPN=180^\circ$，就是说射线 PQ 的方向与 MN 的方向相反。

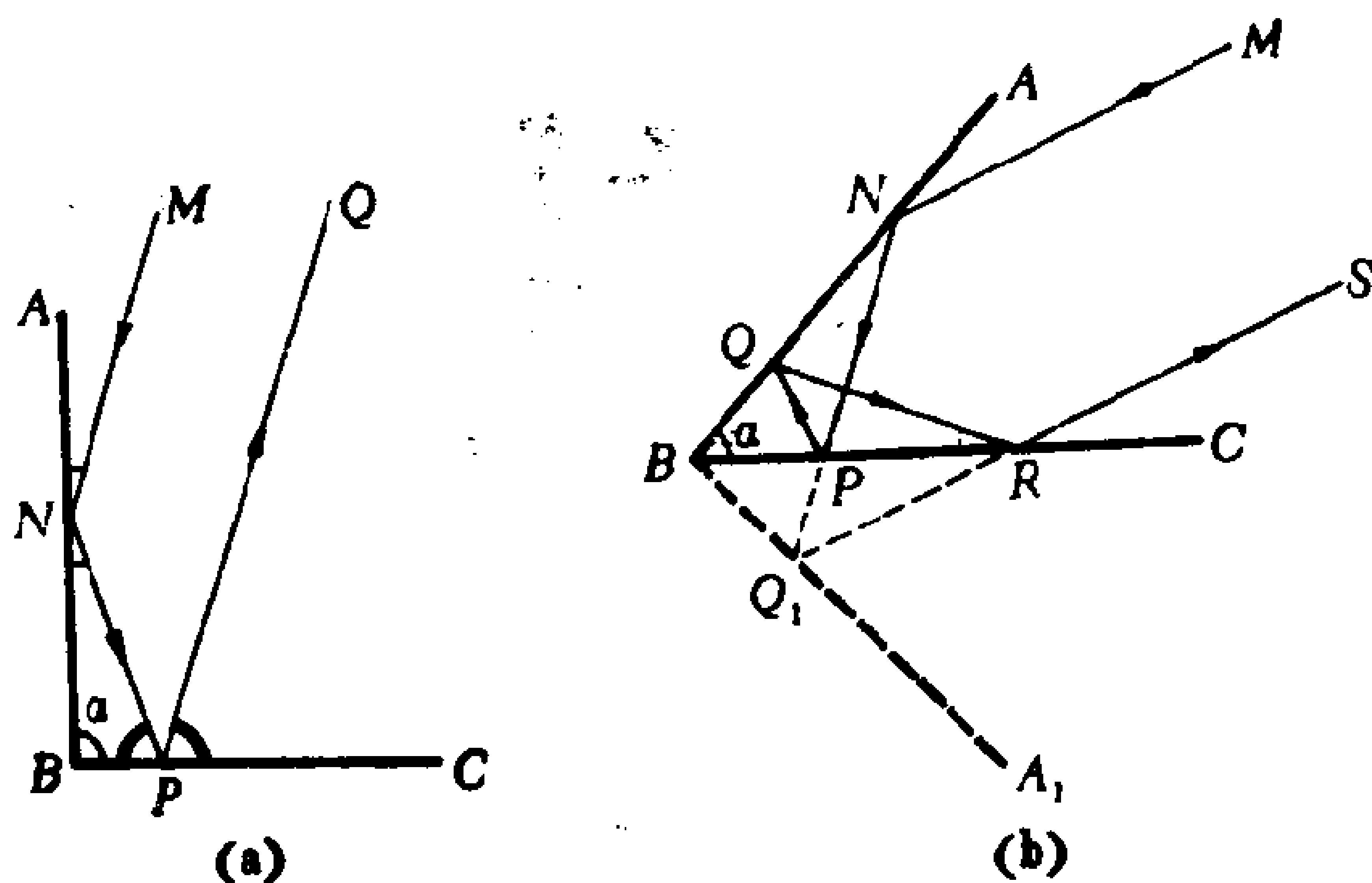


图 101

其次，我们考虑进入光线在角的边上反射四次后再在与进入光线相反的方向上离去的情形(见图101(b)，MN 和RS分别是射进和离去的路线。如果要使进入光线恰好经三次反射后在相反方向离去，那么光线必须垂直地射向第二条角

边。这种情况当然不可能对每条进入光线都发生，事实上对每个 α 值，仅仅有一个方向上的进入光线发生这情况)。在直线 BC 上反射直线 AB 和折线 PQR，并记 BA_1 是 BA 的反射象，Q_1 点是 Q 点的反射象。则

$$\angle ABA_1 = 2\angle ABC = 2\alpha.$$

并且 $$\angle QPB = \angle Q_1PB = \angle NPC,$$

因此 NPQ_1 是一直线。同样可说明 Q_1RS 也是一直线（因为 $\angle QRB = \angle Q_1RB = \angle SRC$）。又因为 $\angle BQ_1P = \angle BQP$，$\angle A_1Q_1R = \angle AQR$，所以 $\angle BQ_1P = \angle A_1Q_1R$。这样，我们就看到：光线 MN 在角 ABA_1($=2\alpha$)的角边上作两次反射（分别在 N 点和 Q_1 点处)后，在 Q_1S 的方向上离去，而 Q_1S 与 MN 反向.由上面的讨论可知，$\angle ABA_1 = 2\alpha = 90°$，即 $\alpha = 90°/2$。反过来，当 $\alpha = 90°/2$ 时，则 $\angle ABA_1 = 90°$，所以光线 MN 在角 ABC 的边上反射四次后，在与进入线相反的方向上离去。

下面我们再考虑光线在角边上反射六次后沿进入方向的反方向离去的情形(图101(c)中，MN 和 TU 分别是进入路线和离去路线，它们方向相反。一般来说，光线不会在角边上反射五次后再在相反方向上离去的)。在直线 BC 上反射直线 AB 和折线 $PQRST$，设 BA_1 是 BA 在 BC 上的反射象，Q_1 点和 S_1 点分别是 Q 点和 S 点的反射象。如同前面那样，我们可推出 NPQ_1 是一直线（$\angle Q_1PB = \angle QPB = \angle NPC$），$S_1TU$ 也是一直线($\angle S_1TB = \angle STB = \angle UTC$)，并且

$$\angle Q_1RB = \angle S_1RC, \quad \angle RQ_1B = \angle PQ_1A_1,$$

$$\angle RS_1B = \angle TS_1A_1.$$

于是我们就可以看出，光线从 MN 进入后，相继在直线 AB

(于N处)，BA_1(于Q处)，BC(于R处)上各反射一次后，又一次在BA_1上反射(于S_1处)，再沿S_1U离去，方向与MN是相反的。

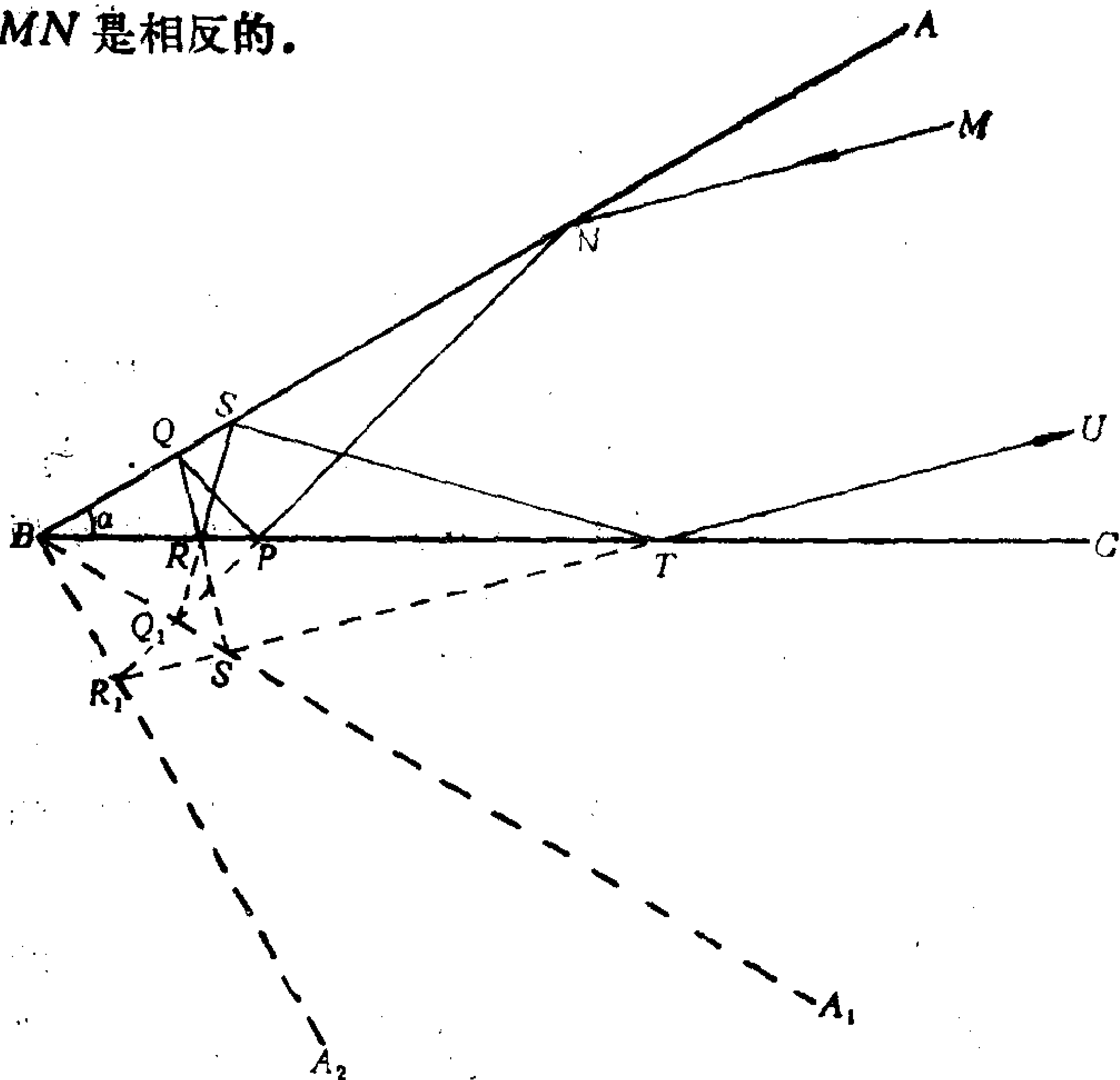


图 101(c)

现在再在直线BA_1上反射直线BC和折线Q_1RS_1，设BA_2是BA_1的反射象，R_1点是R点的反射象。则NPQ_1R_1是一直线(因为$\angle R_1Q_1B=\angle RQ_1B=\angle PQ_1A_1$)，$R_1S_1TU$也是一直线(因为$\angle R_1S_1B=\angle RS_1B=\angle TS_1A_1$)，并且$\angle Q_1R_1B=\angle S_1R_1A_2$(因为$\angle Q_1R_1B=\angle Q_1RB$，$\angle S_1R_1A_2=\angle S_1RC$，而$\angle Q_1RB=\angle S_1RC$)。这样我们就可看出，从$MN$进入的光线于$N$点和$R_1$点处在角$ABA_2(=3\alpha)$的边上反射两次后，在与$MN$反向的$R_1U$上离去。根据上面已证的结论，一定有$3\alpha=90^\circ$，也就是$\alpha=90^\circ/3$。反过来，如果$\alpha=90^\circ/3$，则

$\angle ABA_2=90^\circ$，从而从 MN 进入的光线在角 ABC 的边上反射六次后沿与 MN 相反的方向离去。

最后，设光线在一个角 $ABC=\alpha$ 的边上反射 $2n$ 次后在与进入方向相反的方向上离去（一般来说，光线不能在一个角的边上反射 $(2n-1)$ 次后在与进入方向相反的方向上离去的）。

证明的过程和上面几种情形类似①。大致如下：假设光线先射到 AB 边上，在直线 BC 上反射光线的路径。设 BA_1 是 BA 的反射象；又在 BA_1 上反射 BC 得 BA_2，在 BA_2 上反射 BA_1 得 BA_3，……直至作 $n-1$ 次反射，得到 BA_{n-1}。这时，$\angle ABA_{n-1}=n\alpha$。

一条射向 AB 的进入光线在角 ABC 的边上的反射路线经过一系列适当的反射变换之后，可得到它在角 ABA_{n-1} 的角边上两次反射后离去的路线，离去方向与进入方向相反。于是由前面的结果，可知 $n\alpha=90^\circ$，因此 $\alpha=90^\circ/n$。

第二个解法。设 ABC 是所给角，$MNPQ\cdots$ 是光线所走的路线（图102(a)中给出了 $n=2$，$\alpha=45^\circ$ 的情形)。在本题中，要紧的只是光线的方向。因此为了简便，不妨设所有方向都是从一点 O 发射出的（在图中

$$O1\parallel MN,\quad O2\parallel NP,\quad O3\parallel PQ,$$

等等)。因为 $\angle MNA=\angle PNB$，所以射线 $O2$ 是 $O1$ 在直线 OU（$OU\parallel AB$）上的反射象（为得此结论，只须注意 NM' 是 NP 在直线 NB 上的反射象，见图102(a)）。类似地，射线 $O3$ 是 $O2$ 在直线 OV（$OV\parallel BC$）上的反射象。因此根据43页的命题3，射线 $O3$ 是 $O1$ 旋转 $2\angle UOV=2\alpha$ 角所变得的。类

① 原著中有详细论证，英译本中已省略。

似地，射线$O5$是$O3$经过在同一方向上旋转2α角所变得的。因此$O5$是$O1$旋转4α角所变得，……。因$\alpha=90°/n$所以射线$O(2n+1)$与射线$O1$夹角$180°$；然而$O(2n+1)$正是进入光线在每条角边上各反射n次后所具有的方向，于是本命题的结论就得证了。(这里我们假定了$0<\angle MNA<\alpha$；如果$\angle MNA>\alpha$，那么MN要与BC边相交，也就是说进入光线在遇到BA边之前已在BC边上反射过。这个假定保证与射线$O1,O3,O5,\cdots$平行的那些光线是射向BA边的，而与$O2,O4,\cdots$平行的光线是射向BC边的。如果$\angle MNA=\alpha$，也就是说进入光线MN平行于BC边，那么射线$O(2n)$总是与$O1$反向的。在这种情形，光线最后离去的方向也与进入方向相反，但反射的次数比一般情况少1.见图102(b)，那里表明$\angle ABC=45°$，$\angle MNA=45°$的情形。)

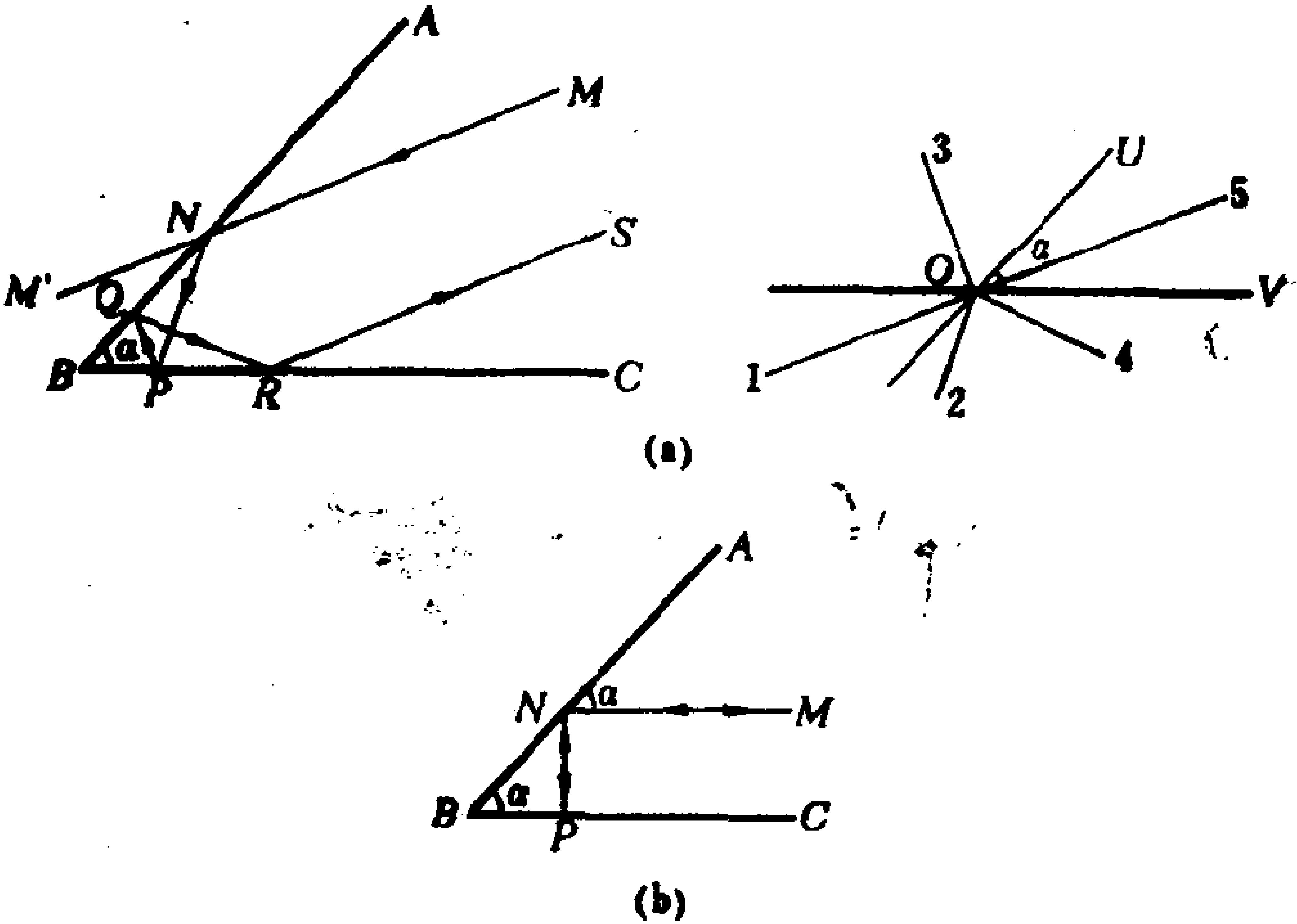


图 102

以上讨论也说明当$\alpha\neq 90^\circ/n$时，不是所有的光线能在角边上反射数次后，在进入方向的相反方向上离去的。

39.（a）第一个解法。（参见15题和21题的第一个解法。）假设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是所求n边形的顶点，B_1是平面上任意一点。将线段A_1B_1相继在直线

$$l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_{n-1},\ l_n$$

上作反射，得到线段$A_2B_2, A_3B_3, \cdots, A_nB_n, A_1B_{n+1}$。这些线段都是互相全等的，特别有$A_1B_1=A_1B_{n+1}$。因此$A_1$点到$B_1$和$B_{n+1}$的距离相等，从而$A_1$点在线段$B_1B_{n+1}$的中垂线上。

再在平面上另选一点C_1，将它相继在直线$l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$，$l_n$上作反射，所得一系列点记作$C_2, C_3, \cdots, C_n, C_{n+1}$。显然$A_1$点到$C_1$和$C_{n+1}$的距离也相等，因此$A_1$也在线段$C_1C_{n+1}$的中垂线上。于是，求出线段$B_1B_{n+1}$的与$C_1C_{n+1}$的两条中垂线的交点，它就是$A_1$了（当我们任意选定了两个不同点$B_1$和$C_1$后，线段$B_1B_{n+1}$和$C_1C_{n+1}$就可作出）。然后，将$A_1$点相继作在给定的$n$条直线上的反射，就得到$n$边形的其余顶点。

在线段B_1B_{n+1}与C_1C_{n+1}不平行的时候（即它们的中垂线p和q相交），本题有唯一解；如果$B_1B_{n+1}\parallel C_1C_{n+1}$，且$p$与$q$不同，则本题无解；如果$B_1B_{n+1}\parallel C_1C_{n+1}$，且$p$与$q$重合，则本题有无穷多个解①。

解出的多边形的各边是可能相交的。

这个解法有一个缺点，就是不能从它看出在n是奇数或偶数时本题的结果有什么本质的差别。从这方面来说，第二

① 应理解为，如果对任取两点B_1和C_1都有$B_1B_{n+1}\parallel C_1C_{n+1}$，且它们的中垂线重合，则本题有无穷多解。——中译者

种解法较好。

第二个解法。(参见15题和21题的第二种解法。)假设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是所求多边形[见图50(a)]。如果我们将 A_1 点相继在直线 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}$ 和 l_n 上作反射，则得到 $A_2,A_3,\cdots,A_n$，最后回到 A_1。因此 A_1 是在直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上的 n 个反射之和的不动点。

第一种情况：n 是偶数。这时，在直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上的反射之和一般来说是一个旋转(见49页)，旋转中心 O 点可以利用反射的加法作出。O 点是这个旋转的唯一不动点，因此 A_1 一定与 O 重合。找到 A_1 后，就不难找到其它各顶点了。因此，在 n 为偶数时，一般来说本题有唯一解。

但是在特殊情况，即在 n 条线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上的反射之和为一个平移或恒同变换(即转角为零度的旋转，或移动距离为零的平移)时，本题无解(平移无不动点)或有不止一个解——平面上任何一点都可取作 A_1 点(每一点都是恒同变换的不动点)。

第二种情况：n 是奇数。这时，在直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上的反射之和一般来说是一个滑动反射(见49页)。因为滑动反射没有不动点，因此当 n 是奇数时本题一般来说无解。但在特殊情况，即在这 n 条直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上的反射之和是在某直线 l 上的反射时(l 是可作出的)，就有许多解，l 上任何一点都可取作为所求 n 边形的顶点 A_1(对称轴上每一点都是反射的不动点)。

(因此，在 $n=3$ 时，本题一般来说无解，只有在三条直线 l_1,l_2 和 l_3 交于一点时[见26题(c)]，或者互相平行时 本题才有无穷多解[见46页上命题(4)])。

(b) 解法与(a)的第二个解法类似。如果 $A_1A_2\cdots A_n$ 是

所求 n 边形[见图50(b)]，则将直线A_nA_1线相继作在直线l_1，$l_2,\cdots,l_{n-1},l_n$ 上的反射，得到直线

$$A_1A_2,\quad A_2A_3,\quad \cdots,\quad A_{n-1}A_n,$$

最后又回到 A_nA_1。于是 A_nA_1 是在直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上的 n 个反射之和的不变直线。下面分两种情形讨论。

第一种情形：n 是偶数。则一般地说在直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上的反射之和为一个旋转，设其旋转中心为O点；因此，一般来说无不变直线。于是，当 n 是偶数时，一般来说本题无解。但是在特殊情形，这 n 个反射之和可能是一个关于O点的中心对称(转角为180°的旋转)，或者是一个平移，也可能是一个恒同变换，在这些情形本题都有不止一个解。在反射之和是中心对称时，可取任何一条过 O 点的直线作为A_nA_1；是平移的情形，可取任何平行于平移方向的直线作A_nA_1；是恒同变换的情形，可取平面上任何直线作A_nA_1。

第二种情形：n 是奇数。则一般来说在直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 上的反射之和为一个滑动反射，设此滑动反射的轴为 l (l 是可以作出的)，则它是滑动反射的唯一不变直线。于是，所求多边形的 A_nA_1 边在直线 l 上；将 l 相继在 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}$ 上作反射，得到 n 边形的其它各边。这样，在 n 是奇数时，一般来说有唯一解。在特殊情形，这 n 个反射之和是在某直线 l 上的反射，这时本题有无穷多解。所求 n 边形的 A_nA_1 边可取 l 本身，也可选取任一条垂直于 l 的直线来作。

(因此，在 $n=3$ 时，本题一般有唯一解。直线 l_1,l_2 和l_3或者都是三角形的外角的分角线，或者有两条是内角的分角线，另一条是外角的分角线。当三条直线 l_1,l_2 和 l_3 交于一点时是例外，此时本题有不止一个解[见 26 题(a)]。这三条直线 l_1,l_2 和 l_3 分别是三角形的三个内角的分角线，或者有

两条是外角的分角线，另一条是内角的分角线。）①

也可用类似于(a)的第一个解法的方法来解(b)，请读者自己去作。

40．(a) 假设本题已解出(图103)。顶点 A_1 经过关于M点的中心对称变到 A_2 点，A_2 经过在 l_2 上的反射变到 A_3，A_3 经过在 l_3 上的反射又变到 A_4，……最后 A_n 经过在 l_n 上的反射变回到 A_1。这样，关于M的中心对称与在直线$l_2, l_3, \cdots, l_n$ 上的各反射之和以 A_1 为一个不动点。关于在M的中心对称又可等价地用两个反射来代替。下面分两种情况来考虑。

第一种情况：n 是奇数。本题就化成求偶数个在直线上的反射之和的不动点的问题。一般来说，这个和是一个旋转（旋转中心O点可以从M和 $l_2, l_3, \cdots, l_n$ 作出来）。因此在 n 为奇数的情形，本题一般有唯一解(参见39题(a)的第二个解法的第一种情形)。只有两种例外情形：这偶数个反射之和是平移——这时本题无解，或是恒同变换——这时本题有许多解。

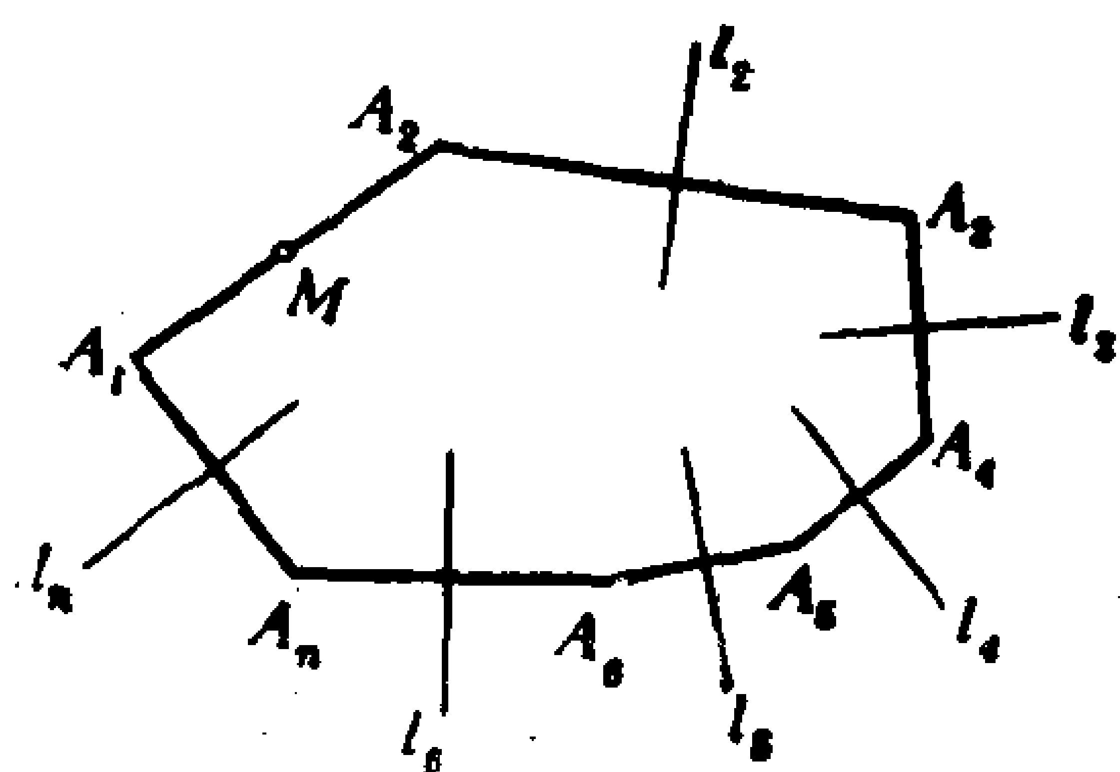


图 103

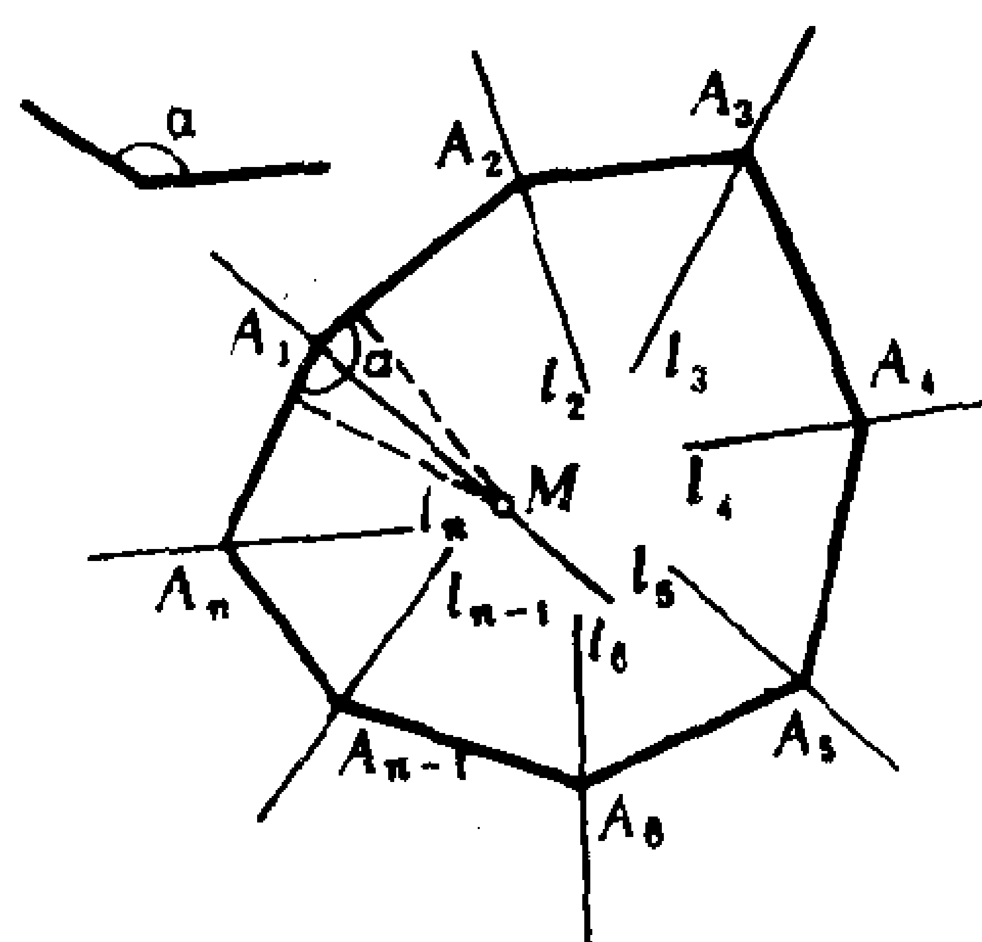


图 104

① 在 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$ 时也是例外，这时有无穷多个解，但解出三角形是退化的，其各边在同一直线上。——中译者

第二种情况：n 是偶数。本题化成求奇数个在直线上的反射之和的不动点的问题。一般来说，这个和是一个滑动反射，因此本题无解(滑动反射无不动点)。在特殊情况下，这些反射之和是一个在某直线 l 上的反射，这时本题有许多解(在一直线 l 上的反射有无穷多个不动点，即 l 上的所有点)。

也可类似于39题(a)的第一个解法来解本题。

解出的多边形可能是自交的。

(b) 假设本题已解出(图104)。直线 A_nA_1 绕M点旋转 $180°-\alpha$ 角变成直线 A_1A_2，A_1A_2 在 l_2上反射变成直线 A_2A_3，A_2A_3 在 l_3 上反射变为直线 A_3A_4，等等。最后，直线 $A_{n-1}A_n$ 在 l_n 上反射变成直线 A_nA_1。这样，中心为M，转角为 $180°-\alpha$的旋转（它可用两个反射之和来代替）与在直线 $l_2,l_3,\cdots,l_n$上的$n-1$个反射之和以 A_nA_1 为一条不变直线。

分两种情况讨论。

第一种情况：n 是偶数。奇数个反射之和一般来说是一个滑动反射，它有唯一不变直线，即轴线 l（它是可以作出的），因此本题有唯一解。但在特殊情形，这奇数个反射之和是一个反射，此时本题将有无穷多个解（因为在一直线上的反射有无穷多条不变直线）。

第二种情况：n 是奇数。在这情况下，我们考虑的变换是偶数个在直线上的反射之和，一般来说它是一个旋转。这时本题无解。然而在特殊情况，这偶数个反射之和是一个中心对称，或是一个平移，或是恒同变换。在这些特殊情况下，本题都不止一个解。

作为本题解的多边形是可能自交的；$l_2,l_3,\cdots,l_n$ 可能是内角的分角线，也可能是外角的分角线。

也可用类似于39题(a)的第一个解法的方法解本题。

41. (a) 假设$A_1A_2A_3\cdots A_n$是所求n边形(图105)。从圆心O向它的各边$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$, A_nA_1作垂线（这些垂线可以根据条件作出，因为这个n边形各边的方向已给出)。将A_1点相继在这些垂线上作反射，A_1先变到A_2，A_2再变到A_3，…，A_{n-1}变到A_n，最后A_n又变回到A_1。于是A_1是这n次反射（在这n条垂线上的）之和的不动点。下面分两种情况讨论。

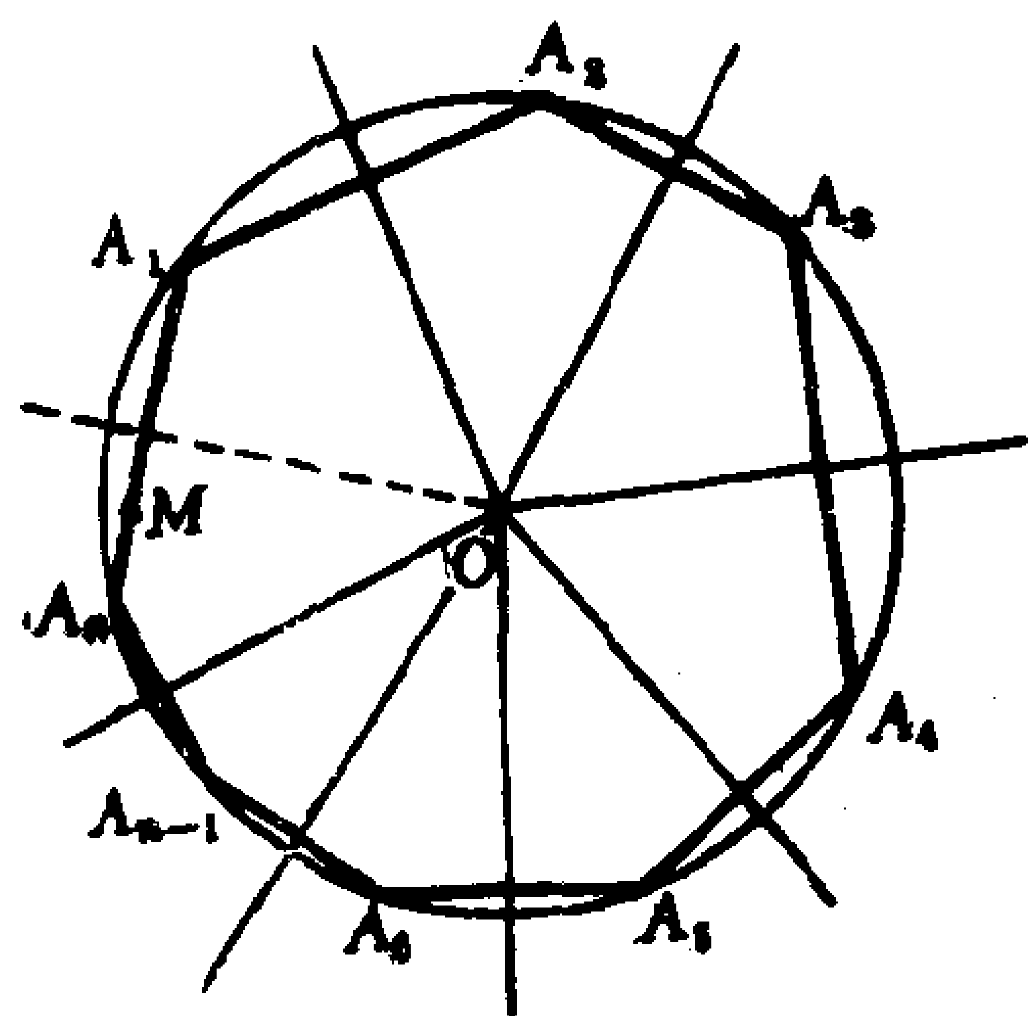


图 105

第一种情况：n是奇数。由于在三条交于一点的直线上的反射之和仍为一个反射，并且其对称轴过这个交点（见46页命题4)，我们不难看出在任何奇数条交于一点的直线上的反射之和也是一个反射，并且其对称轴过此交点。（首先用一个反射代替前三个反射，再考虑它和下面两个反射之和，……)① 因此，在n是奇数时，本题中的n次反射之和仍是一个反射，其对称轴l过圆心O点。在圆周上恰好有两个点是这个反射的不动点，就是l与圆周的两个交点。取其中任一点作为所求n边形的顶点A_1，再通过反射得到其它顶点。于是，在这种情况本题有两个解。

第二种情况：n是偶数。由于在任何两条相交于O点的

---

① 也可这样看：奇数个反射之和为滑动反射或反射。由于本题中的奇数个反射的轴都过O点，O点是它们之和的不动点。于是，这些反射之和一定是反射，轴过O点。——中译者

直线上的反射之和为一个旋转，其旋转中心为O，我们可推出在n（偶数）条过O点的直线上的反射之和可表示成$n/2$个绕O点的旋转之和，从而它本身也是一个绕O点的旋转。一般来说，绕O点的一个旋转只有唯一的不动点O点，而在以O为圆心的圆上沒有不动点；因此当n是偶数时，一般情况下本题无解。但当这n个反射之和是恒同变换时则是例外，本题有无穷多解，圆上任何一点都可选作所求n边形的顶点A_1。

(b) 假设所求n边形已作出(图105)。过圆心O向各边$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$作垂线（由于$O$点及多边形的这$(n-1)$条边的方向是已知的，这些垂线由条件可作出）。将$A_1$点相继在这$(n-1)$条直线上作反射，最后就变到$A_n$。下面分两种情况讨论。

第一种情况：n为奇数。这时，在这$(n-1)$条直线（它们都过O点）上的反射之和是一个以O点为中心的旋转，其转角α可由这些直线来求出。于是$\angle A_1OA_n=\alpha$是已知角。这样，我们可求出弦A_1A_n的长度以及它到O点的距离d。以O为圆心，d为半径作圆。因为A_1A_n过M点，又与此圆相切，所以它在过M点的圆的切线上。本题可能有两个解，也可能只有一个解或无解。

第二种情况：n是偶数。这时，在$(n-1)$条过O点的直线上的反射之和仍是一个反射，其对称轴l过O点。因此A_1点和A_n点互为在l上的反射象。由于A_1A_n过已知点M，它就在从M向l作的垂线上。本题总有唯一解。

42. (a) 由于在三条交于一点O的直线上的反射之和仍为一个反射，并且轴线l过O点，我们可推出A_3点是A点在l上的反射象；同样A_6点又是A_3在l上的反射象。于

是 A_6 与 A 重合。

对于奇数条交于一点的直线，本题的结论是成立的（对照13题)。如果偶数(n)条直线交于 O 点，则在这些直线上的反射之和是一个绕 O 点的旋转，记 α 为其转角.则只有当 α 是 $180°$的整数倍时，A 点经过 $2n$ 次反射才能回到原来位置。

附注：要使平面上任何一点 A 经过在直线 l_1,l_2,l_3,l_1,l_2,l_3 上的六次反射之后得到的象点 A_6 总与 A 重合的充分必要条件是：l_1,l_2,l_3 交于一点或者互相平行(如果 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，则在 l_1,l_2,l_3 上的三次反射之和也是一个反射。再用上面解法中的理由，可说明 $A_6=A$)。在其它情形，在 l_1,l_2,l_3 上的反射之和是一个滑动反射，因而 A_6 是 A 经过两个相同的滑动反射所得到的，也就是 A 经过一个平移所得到的，不可能与 A 重合。(沿直线 l 的两个相同的滑动反射之和，可分解成下面四个变换之和：沿 l 的一个平移，在 l 上的反射，在 l 上的反射以及沿 l 的一个平移(与第一个平移相同)，因此也就是两个相同的平移之和。)

(b) 本题实质上与(a)相同[也可看14题(b)]。

(c) 设四条直线的交点为 O。在 l_1 和 l_2上的反射之和是绕 O 点的一个旋转，设转角为 α；在 l_3 和 l_4 上的反射之和也是绕 O 点的一个旋转，设转角为 β。由此可知，不论采用哪种次序作这些反射，所得的 A_4 点都是 A 绕 O 点转 $\alpha+\beta$角变得的点[参照14题(a)]。

43. (a) 由于直线 CM,AN,BP 交于一点或互相平行，在直线 CM,AN,BP,CM,AN,BP 上的六次反射之和为恒同变换[见42题(a)]。为了证明直线 CM',AN' 和 BP' 也交于一点或互相平行，只须说明在直线 CM',AN',BP',CM'，AN',BP' 上的六次反射之和也是恒同变换(见42题(a) 解答

后的注解)。由于 CM' 是 CM 在角 BCA 的分角线上的反射象，一个绕 C 点，转角为角 BCM' 的旋转把 CM 变到 CA，把 CB 变到 CM'。由此可推出，在直线 CM' 上的反射就是在 CB,CM,CA 这三条直线上的反射之和（对照图 106(a)与图47(b)，并参看第二章中命题 4 证明的后半部分)。类似地，在直线 AN' 上的反射等于在 AC,AN,AB 这三条直线上的反射之和；在直线 BP' 上的反射是在 BA,BP,BC 这三条直线上的反射之和。于是，在直线 CM',AN',BP' 上的反射之和就等于分别以 $CB,CM,CA,AC(=CA),AN,AB,BA(=AB),BP,BC$ 为轴的九次反射之和。因为连续在同一

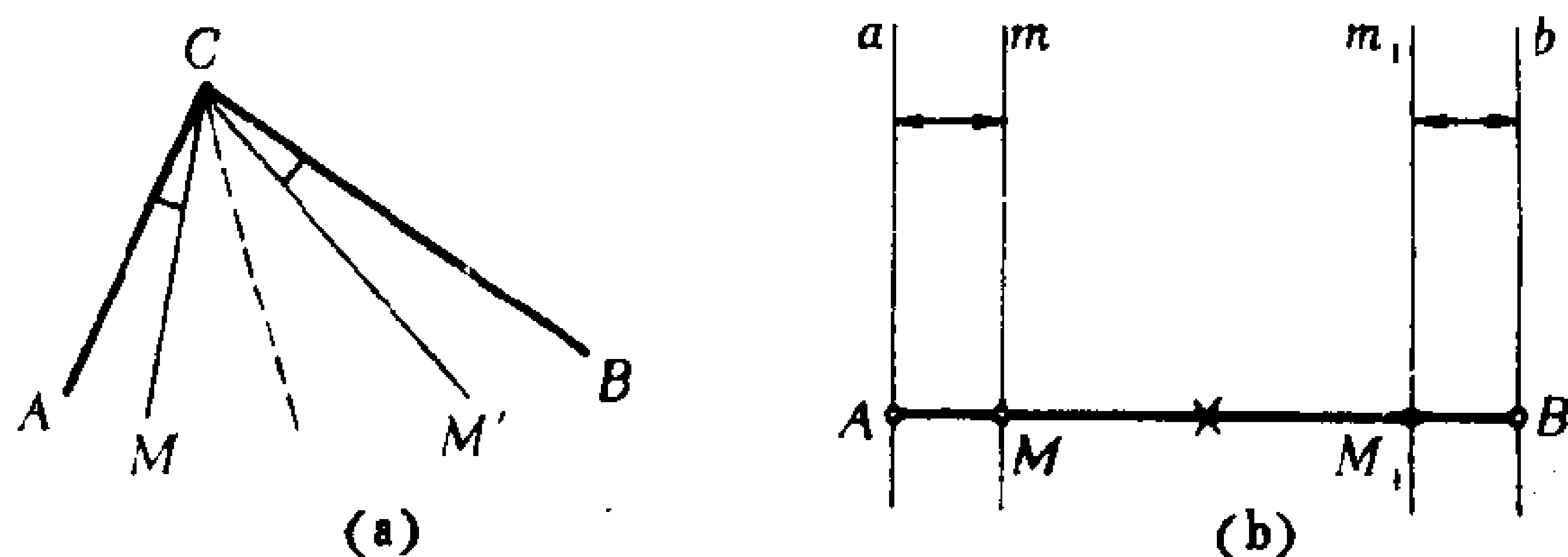


图 106

直线上的两次反射互相抵消，所以这九次反射之和等于在 CB,CM,AN,BP,BC 上的五次反射之和。把这个变换重复进行两次，就得到在直线 $CB,CM,AN,BP,BC,CB(=BC),CM,AN,BP,BC$ 上的十次反射之和，而它又等于在 CB,CM,AN,BP,CM,AN,BP,BC 上的八次反射之和。由条件知，中间的六次反射之和为恒同变换，因此这八次反射之和等于在 CB 与 $BC(=CB)$ 上的两次反射之和，这是一个恒同变换。

(b) 过 M 点和 M_1 点垂直于 AB 的两条直线分别记作 m

和 m_1；过 N 点和 N_1 点垂直于 BC 的直线分别记作 n 和 n_1；过 P 点和 P_1 点垂直于 CA 的直线分别记作 p 和 p_1。又设 a 和 b 分别是过 A 点和 B 点，垂直于 AB 的直线。本题的结论可由下述命题推出：如果在直线 m,n,p,m,n,p 上的六次反射之和是恒同变换，则在 m_1,n_1,p_1,m_1,n_1,p_1 上的六次反射之和也是恒同变换。(参见(a)的解法。这里还用到下面的事实：一个三角形三边上的垂线不会互相平行。) 下面我们证明这个命题。首先，在 m_1 上的反射等于在 A 点直线 m 与 B 点上的反射之和。事实上，在 A 点上的反射等于在直线 AB 与 a 上的反射之和，在 B 点上的反射等于在直线 b 与 AB 上的反射之和。这样，在 A 点直线 m 与 B 点上的反射之和等于在直线 AB,a,m,b,AB 上的五次反射之和。但是，m_1 是 m 在 AB 中点上的反射象，把 m 变到 b 的平移一定把 a 变到 m_1；因此在直线 a,m,b 上的反射之和等于在 m_1 上的反射[对照图106(b)和图47(a)]。于是，上述五次反射之和就等于在 AB,m_1,AB 上的三次反射之和，或等于在 M_1 点与直线 AB 上的反射之和。而在 M_1 点上的反射又可分解为在 m_1 与 AB 两条直线上的反射之和，因此在 M_1 与 AB 上的反射之和又等于在 m_1，AB 与 AB 上的三次反射之和，也就是等于在 m_1 上的反射。类似地可说明，在 n_1 上的反射等于在 B 点上直线 n 与 C 点上的反射之和；在 p_1 上的反射等于在 C 点上直线 p 与 A 点上的反射之和。

这样，在直线 m_1,n_1,p_1,m_1,n_1,p_1 上的六次反射之和就等于在下列点与直线上的反射之和：$A,m,B,B,n,c,c,p,A,A,m,B,B,n,c,c,p,A$，也就是在 A,m,n,p,m,n,p,A 上的八次反射之和。当中间六次反射之和为恒同变换时，这八次反射之和就化为在 A 点的两次反射之和，也是恒同变换

(参见(a)的解)。

44. 如果在三条直线上的反射之和连作两次，那么所得到的或是恒同变换，或是一个平移(见42题(a)的解，特别是解后的附注)。这样，A点按第一种次序经过十二次反射所得的点A_{12}，也就是A经过两次平移所变得的点（这两次平移的移动距离都有可能为零，也就是它们都可能是恒同变换)；而A点按第二种次序经过十二次反射所得的点A'_{12}，是A按相反的次序经过这两个平移所变得的点。由此推出本题的结论(参看14题(a)的解)。

45. 第一个解法(以58页上的定理1为基础)。先讨论l_1与l_2不平行的情形。[图107(a)]。假设直线m已作出。根据定理1，可用一个旋转把线段AX变到线段BY，使A变到B，X变到Y(由于l_1与l_2不平行，不能用平移把AX变到BY)。这个旋转的转角α等于l_1与l_2的夹角。于是可以这样来求这个旋转的中心：在AB上作弧，使它所含圆周角为α（如果记P为l_1和l_2的交点，则此弧在三角形ABP的外接圆S上)，则AB的中垂线与此弧的交点就是旋转中心O点①。设此旋转将所求直线m变到m'，m'也通过Y点。下面我们就(a)，

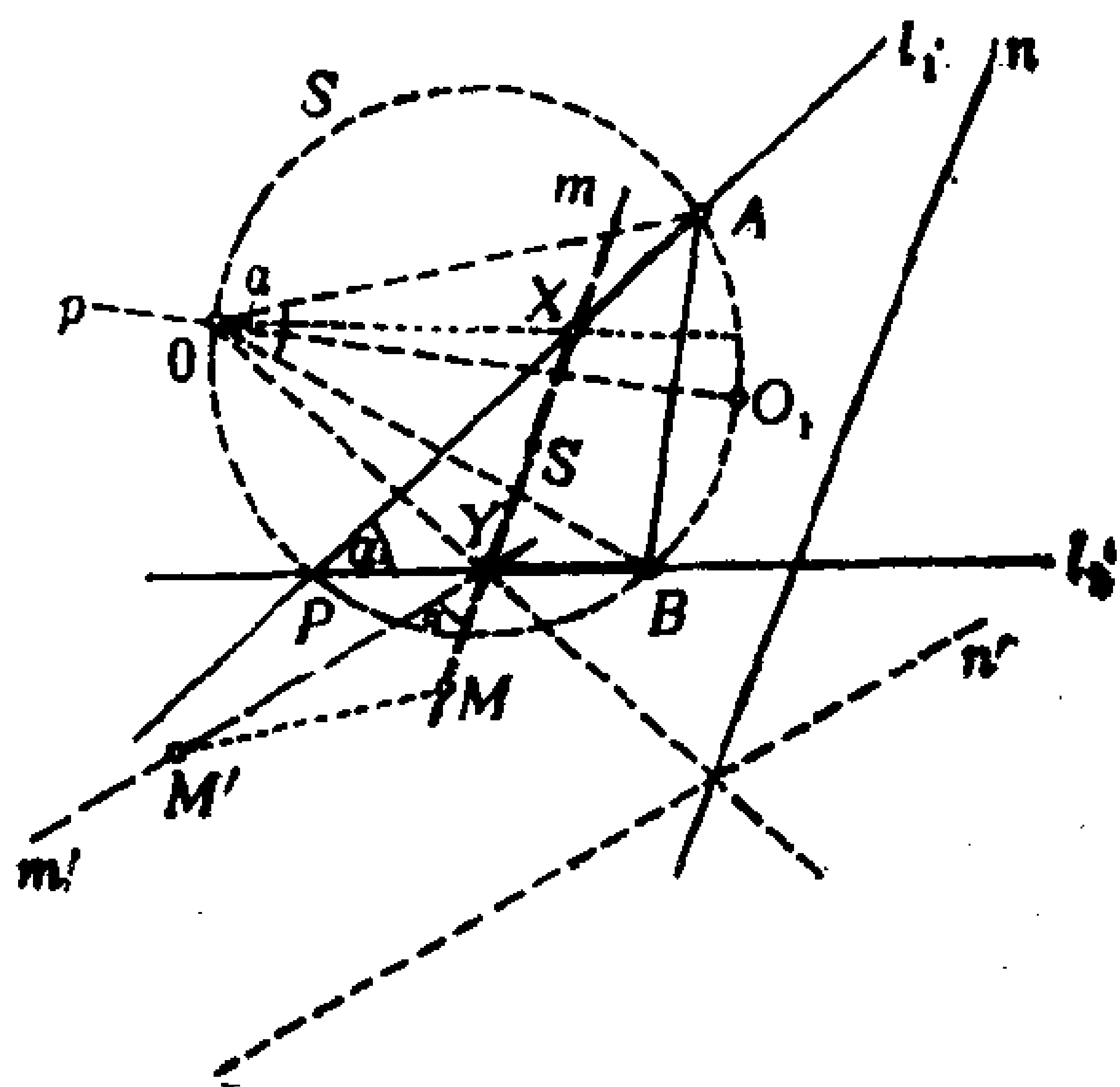


图 107(a)

① 圆S与AB的中垂线有两个交点，它们分别对应着X和Y在直线AB的同侧和不同侧两种情形的解。

(b),(c),(d)的不同要求来讨论。

(a) 将直线n绕O点旋转α角，所得直线记作n'。直线OY是m与m'夹角的分角线，它也是n与n'所夹角的分角线。于是，联结n与n'的交点和O点的直线与l_2的交点就是Y。本题可能有两个解(见125页的注①)。

(b) 设M点绕O点转α角变为M'点。则m'过M'点，而且m'与m的夹角为α。于是，在MM'上作弧，使其所含圆周角为α，此弧与l_2的交点就是Y。本题最多可能有四个解。①

(c) 我们已知等腰三角形OXY的顶角为α，底边$XY=a$。于是，O到X的距离OX可以计算出来。本题最多可能有四个解。

(d) 设线段XY的中点是S。由于等腰三角形OXY的角都是已知的，我们可求出比值

$$\frac{OS}{OX}=k, \qquad \angle XOS=\frac{1}{2}\alpha.$$

因此，S点可由X点经过一个所谓"螺旋相似变换"而变得(见第二卷第一章的第二节)。于是，如果把直线l_1经过这个螺旋相似变换变得的直线记作l_1'，那么S就是l_1'与r的交点。所求直线m垂直于OS，并且过S点。本题一般有两个解，但如果l_1'与r重合，则有无穷多个解。

如果$l_1 /\!/ l_2$,则所求直线或者经过线段AB的中点S，或者平行于AB[图107(b)]。在这种情况，解法就更加简单了。下面我们只指出解的个数。

(a) 如果n与AB,l_1都不平行，则有唯一解；如果$n /\!/ l_1$

① 原著中说可能有两个解。但是如果允许X和Y位于直线AB的两侧，则最多应有四个解。——中译者

$/\!/ l_2$，则无解；如果 $n /\!/ AB$，则有无穷多解。

(b) 如果M既不在直线 AB 上，又不在 l_1 与 l_2 的中位线 l_0(即与 l_1,l_2 平行，且到它们的距离相等的直线)上，则有两个解；如果M在 AB 上或在 l_0 上，但不是 S，则有唯一解；如果M与 S 重合，则有无穷多个解。

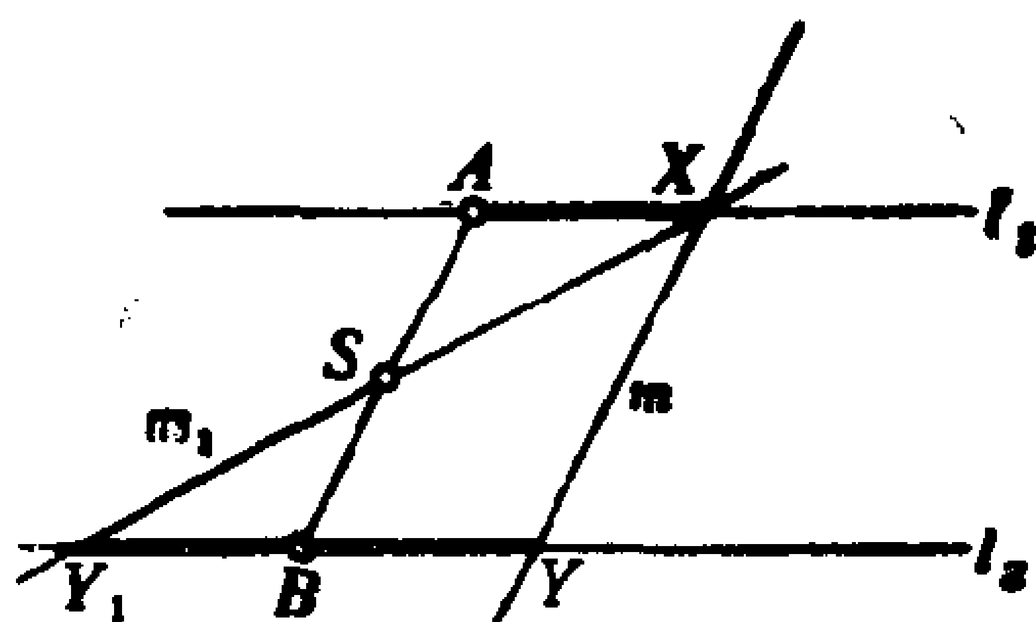


图 107(b)

(c) 如果 $a \neq AB$，且 a 大于 l_1 与 l_2 的距离 d，则有两个解；如果 $a=d$(但 $AB \neq d$)，则有唯一解；如果 $a<d$，则沒有解；如果 $a=AB$，则有无穷多个解。

(d) 如果 r 不与 l_1 平行，又不通过 S 点，则有一个解；如果 $r /\!/ l_1$，但不通过 S，则无解；如果 r 通过 S，则有无穷多个解。

(a),(c),(d)的第二个解法(以58页上的定理 2 为基础)。根据定理 2，线段 AX 可以经过一个滑动反射(或反射，这可看作滑动反射的特殊情形)变到直线BY，并且 A 变到 B，X 变到 Y。这个滑动反射的轴线 l 通过线段 AB 的中点，并且平行于 l_1 和 l_2 夹角的分角线①，滑动距离 d 等于 A_1B，这里 A_1 是 A 在直线 l 上的反射象(图108)。设 X_1 是X 在 l 上的反射象。那么

$$X_1Y /\!/ l, \qquad X_1Y = d.$$

① 因为直线 l_1 和 l_2 有两个夹角，分角线也有两条，所以把 AX 变到BY 的滑动反射有两个(分别对应着 X 和 Y 在直线 AB 的同侧或不同侧两种情况)。如果 $l_1 /\!/ l_2$，则一个滑动反射的轴平行于 l_1，另一个的轴垂直于 l_1。这说明在解(a),(c)和(d)时，$l_1 /\!/ l_2$ 这种情况的特殊性。

现在分别讨论(a)，(c)和(d)三种情况。

图 108

(a) 在直角三角形 XX_1Y 中，已知 $X_1Y=d$，$\angle XYX_1$ 等于直线 m 与 l 的夹角，因此边 XX_1 的长度可求出。作直线 l' 平行于 l，并且与 l 的距离为 $XX_1/2$。那么 l' 与 l_1 的交点就是 X。一般来说，在 l_1 与 l_2 不平行时本题有两个解。

(c) 在直角三角形 XX_1Y 中，斜边 $XY=a$ 和直角边 $X_1Y=d$ 都是已知的，因此另一直角边 XX_1 也可求出。然后用类似于(a)的方法可找到 X 点。本题一般有四个解①。

(d) 线段 XY 的中点 S 一定在直角三角形 XX_1Y 的中位线 l 上，因此 S 就是 l 和 r 的交点。在 l 上取点 S_1，使 $SS_1=d/2$，然后过 S_1 作垂直于 l 的直线 p。则 p 与 l_1 的交点就是 X 点。一般来说本题有两个解。

46. 我们只讨论 l_1，l_2 和 l_3 并不都互相平行的情形。不

① 原著中是"本题有两个解"，这是不对的。见第一个解法。——中译者

妨设 l_3 与 l_1, l_2 都不平行。假设本题已解出(图109)。根据定

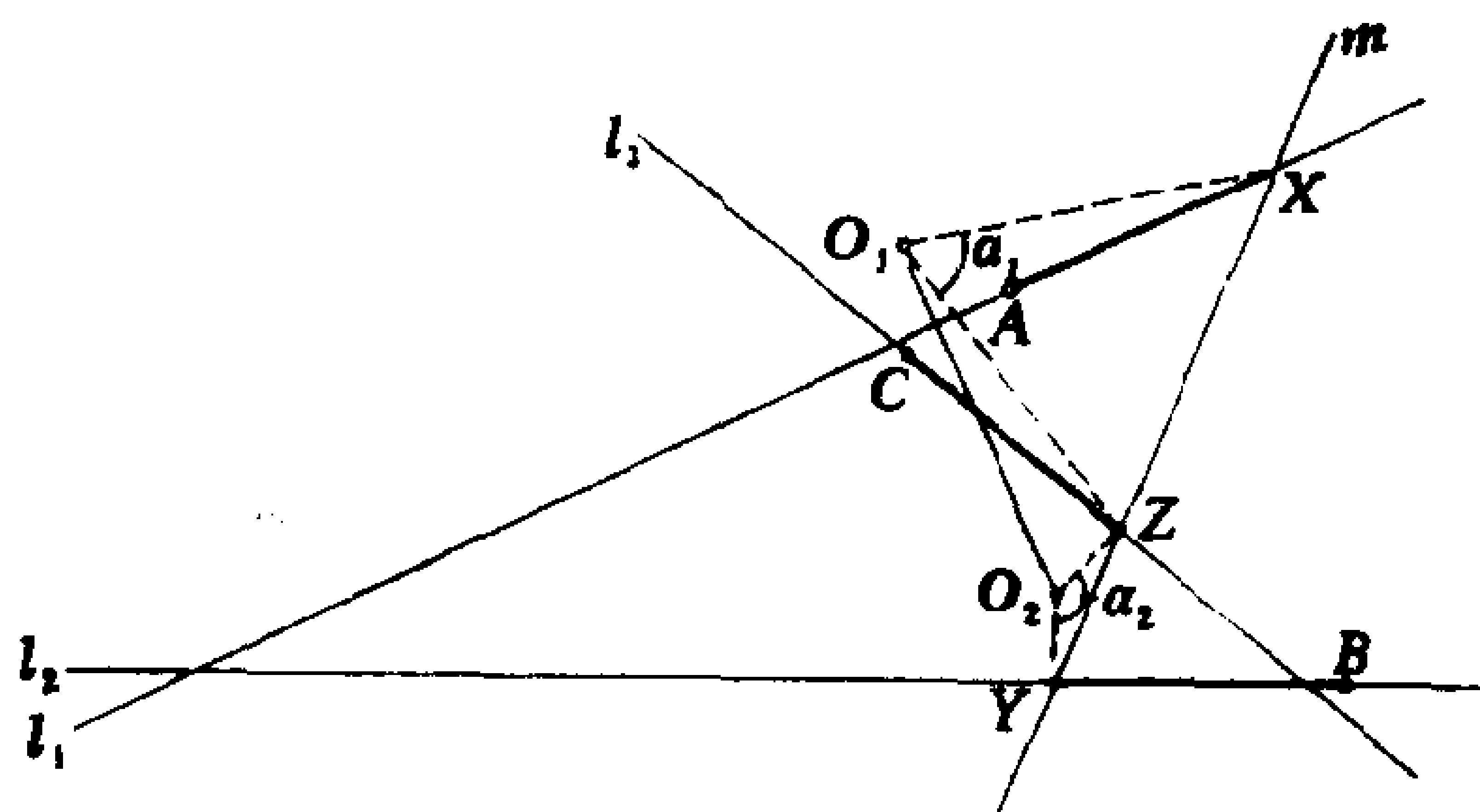


图 109

理 1，有一个旋转把 AX 变成 CZ，又有一个旋转把 BY 变成 CZ。这两个旋转的转角分别是直线 l_3 与 l_1, l_2 的夹角 a_1, a_2，旋转中心 O_1, O_2 也可找到(见45题第一个解法)。三角形 O_1XZ 和 O_2YZ 都是等腰三角形，顶角分别在 O_1, O_2 处，并分别等于 a_1 和 a_2，因此

$$\angle O_1ZX = 90^\circ - \frac{1}{2}a_1, \quad \angle O_2ZY = 90^\circ - \frac{1}{2}a_2.$$

于是可推出

$$\angle O_1ZO_2 = \frac{1}{2}(a_1 \pm a_2).$$

这样，Z 就可找出：在 O_1O_2 上作弧，使它所含圆周角等于 $(a_1+a_2)/2$ 或 $(a_1-a_2)/2$，此弧与 l_3 的交点就是 Z①。

① 在原著中，还有谈解的个数的一段话："角 α_1 和 α_2，旋转中心 O_1 和 O_2 都各有两种选择(对照上题的解)。因此本题最多十六个解。"然而，α_1 与 O_1 是互相牵制的，当 α_1 选定后，O_1 就只有一个选择了。同样，α_2 与 O_2 也互相牵制。因此并没有十六个解。——中译者

47．假设本题已解出(图110)。根据定理1，有一个旋转把BP变成CQ。它的转角等于AB和AC的夹角α，旋转中心O可象45题(a)—(d)的第一个解法那样找到。因为等

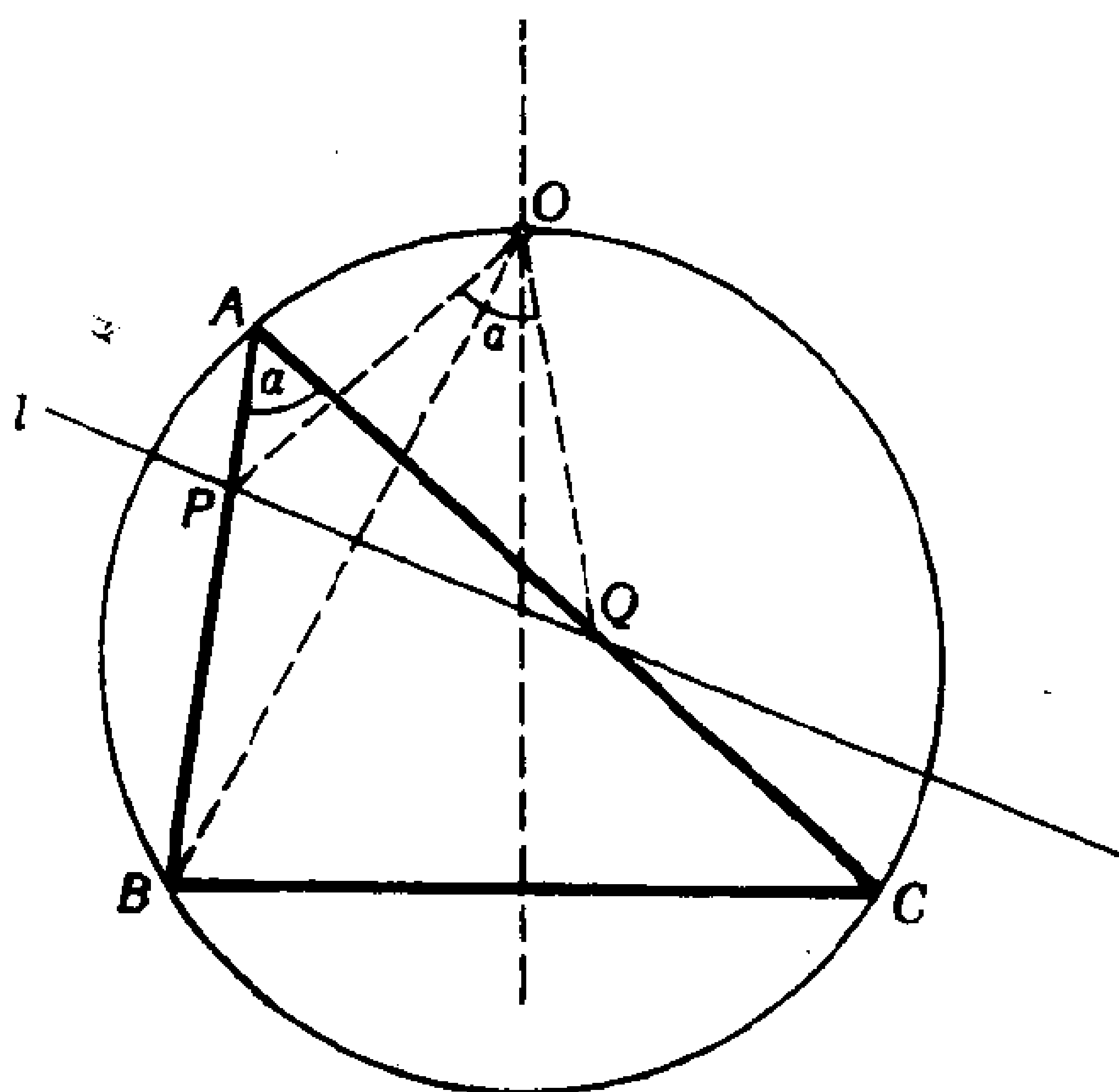


图 110

腰三角形OPQ的顶角（在O处）为α，所以我们可求出比值

$$\frac{OP}{PQ}=k.$$

但是根据本题的条件，$PQ=BP$，因此

$$\frac{OP}{BP}=k.$$

于是，P点就可找到：到O点和B点的距离之比为k的点的轨迹与AB边的交点就是P点。上述轨迹是一个圆，我们可以这样来证明这个事实：设P是满足$OP/BP=k$的任意一点(见图111)。设$\triangle OPB$在顶点P处的内角和外角的分角线分别与底边OB交于M点和N点，则有

$$\frac{OM}{MB}=\frac{ON}{BN}=k=\frac{OP}{BP}.$$

因此M,N与P点无关，完全被O和B决定。因为两条分角线互相垂直，P在以MN为直径的圆上。

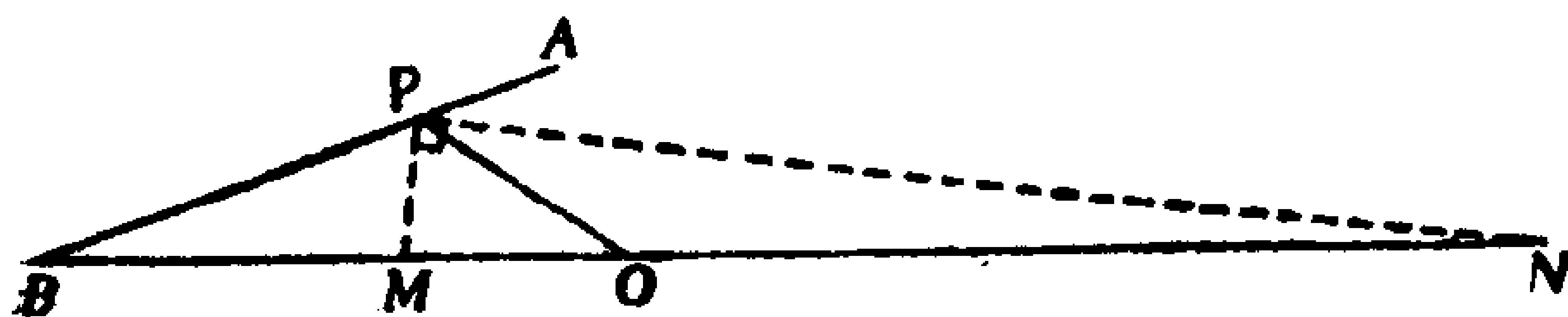


图 111